Búsqueda del mínimo número de k-sets en un conjunto de n puntos

Javier Rodrigo *   M.ª Dolores López †

Resumen

En este trabajo se desarrolla una forma novedosa para encontrar el mínimo número de k-sets en un conjunto de n puntos situados en posición general, a partir de la búsqueda del mínimo número de puntos que pueden formar parte de algún k-set.

1 Introducción

La búsqueda de cotas superiores e inferiores para el número de bisectores o k-sets que se pueden encontrar en un conjunto de puntos situados en posición general, es un problema ampliamente estudiado en la literatura. Por ejemplo, para el conjunto de bisectores es conocido el mínimo $\frac{n}{2}$ ([4]) y para el mínimo número de ($\leq k$)-sets es conocida la cota inferior $3\binom{k+1}{2}$ que se alcanza para $k < \frac{n}{3}$, pero que ha sido mejorada para k cercano a $\frac{n}{2}$ a $\frac{n^2}{2} - n\sqrt{n^2-4k^2} + O(n)$ ([3]), y más recientemente a $F(k,n) + O(n)$, para la F definida en [2], que mejora las anteriores para k suficientemente cercano a $\frac{n}{2}$. Recientemente ha sido hallada la cota inferior de $3\binom{k+1}{2} + \sum_{j=\left[\frac{n}{3}\right]}^{k-1}(3j-n+3)$, que mejora las anteriores para $k \geq \frac{n}{3}$ ([1]).

En este trabajo nos planteamos el problema de hallar el mínimo número de k-sets que puede haber en un conjunto de n puntos situados en posición general ($k < \frac{n}{2}$), mediante técnicas distintas a las utilizadas en Lovasz et al. 2004, basadas en la búsqueda del número de j-aristas.

2 Búsqueda del mínimo número de k-sets en un conjunto de n puntos

Definición 2.1. Llamamos I_k a la intersección de los cierres convexos de los posibles subconjuntos de $n-k$ puntos que se pueden formar en una nube de n puntos.

Definición 2.2. Llamamos $I_{n,s}$ a la intersección de los cierres convexos de los posibles subconjuntos de $\left[\frac{n}{2}\right] + s$ puntos que se pueden formar en una nube de n puntos. (Se entiende $\left[\frac{n}{2}\right]$ como la parte entera de $\frac{n}{2}$.)

2.1 Mínimo número de puntos que pueden formar parte de algún k-set

Para hallar el mínimo número de k-sets, nos planteamos el problema previo de hallar el mínimo número de puntos de un conjunto de n puntos que pueden intervenir en algún k-set. Vemos un resultado preliminar:

*Departamento de Matemática Aplicada. E.T.S. de Ingeniería. Universidad Pontificia Comillas de Madrid. jrodrigo@upco.es

†Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil de la E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid. ma08@caminos.upm.es

Proposición 2.3. *Los puntos de la nube pertenecientes a I_k no pueden estar en ningún k-set.*

Demostración. Si alguno de ellos perteneciera a un k-set, habría una recta que lo separaría de $n-k$ puntos de la nube por lo que no estaría en el cierre convexo de esos $n-k$ puntos, luego no pertenecería a I_k, contradicción. $\square$

Por tanto, si maximizamos el número de puntos de la nube que pueden estar en I_k, minimizamos el número de puntos de la nube que intervienen en los k-sets. Veamos cuál es ese máximo, hallando el máximo número de puntos de la nube que puede haber en $I_{n,s}$, para $s > 0$, $\left[\frac{n}{2}\right] + s < n$ lo que da el máximo deseado si $s = \frac{n}{2} - k$ para n par, y si $s = \frac{n+1}{2} - k$ para n impar:

Proposición 2.4. *Si $n > l > 2s-2$, en $I_{n,s}$ no puede haber l puntos de la nube, si n es impar y los puntos están en posición general.*

Demostración. Supongamos que hubiera l puntos de la nube en $I_{n,s}$, entonces tomando otro punto p en la frontera del cierre convexo de los n puntos (p existe porque $\left[\frac{n}{2}\right] + s < \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} = n$ por la condición dada, con lo que los puntos de la nube en $I_{n,s}$ no están en la frontera del cierre convexo de los n puntos), y ordenando angularmente los l puntos desde p: $p_1, \ldots, p_l$, tenemos que la recta que une p con p_1 deja en el semiplano abierto en el que están los puntos de la nube menores angularmente desde p que p_1 un número de puntos de la nube mayor o igual que $\left[\frac{n}{2}\right] - s + 1$, ya que en el otro semiplano abierto tiene que haber un número de puntos de la nube menor o igual que $\left[\frac{n}{2}\right] + s - 2$, para que no haya un cierre convexo de $\left[\frac{n}{2}\right] + s$ puntos de la nube que evite a p_1. Entonces, la recta que une p con p_2 deja en el semiplano abierto en el que están los menores angularmente que p_2 un número de puntos de la nube mayor o igual que $\left[\frac{n}{2}\right] - s + 2$, ya que están los anteriores y p_1.

Análogamente, la recta que une p con p_l deja en el semiplano abierto en el que están los puntos de la nube menores angularmente que p_l un número de puntos de la nube mayor o igual que $\left[\frac{n}{2}\right] - s + l > \left[\frac{n}{2}\right] - s + 2s - 2 = \left[\frac{n}{2}\right] + s - 2$, luego el cierre convexo de $\frac{n}{2} + s - 1$ de esos puntos y p evitará a p_l, contradicción con que p_l pertenece a $I_{n,s}$. $\square$

Observación 2.5. Por tanto, si n es impar y $s < \frac{n+1}{2}$, el máximo número de puntos de la nube que puede haber en I_n es menor o igual que $2s-2$.

Ejemplo 2.6. Vamos a ver ejemplos en los que se alcanza la cota superior anterior para todo $n > 2s-1$, por lo que el máximo número de puntos en la intersección será $2s-2$ si n impar:

Ponemos $n-(2s-2)$ puntos de la nube en posición convexa, y los $2s-2$ restantes en $I_{n-(2s-2),2}$, en posición general con los anteriores. Entonces, si tomamos un cierre convexo de $\left[\frac{n}{2}\right] + s$ puntos de la nube entre los que no estén todos los $2s-2$ considerados, habrá al menos $\left[\frac{n-(2s-2)}{2}\right] + 2$ puntos de los $n-(2s-2)$ puntos de la nube restantes, luego en el cierre convexo estarán los $2s-2$ puntos considerados por lo que estos estarán en $I_{n,s}$ (ver figura 1).

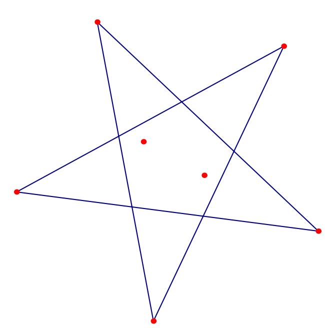

Figura 1: Caso en que $I_{7,2}$ continene al máximo número posible de puntos de la nube: 2

Veamos cuál es el máximo número de puntos de la nube que puede haber en la intersección cuando n es par. Vemos primero la cota superior:

Proposición 2.7. *Si $n > l > 2s-1$, en $I_{n,s}$ no puede haber l puntos de la nube, si n es par y los puntos están en posición general.*

Demostración. Supongamos que hubiera l puntos de la nube en $I_{n,s}$, entonces tomando otro punto p de la nube en la frontera del cierre convexo de los n puntos (existe porque $\frac{n}{2}+s < \frac{n}{2}+\frac{n}{2} = n$ por la condición dada, con lo que los puntos de la nube en $I_{n,s}$ no están en la frontera del cierre convexo de los n puntos), y ordenando angularmente los l puntos desde p: $p_1, \ldots, p_l$, tenemos que la recta que une p con p_1 deja en el semiplano abierto en el que están los puntos de la nube menores angularmente desde p que p_1 un número de puntos de la nube mayor o igual que $\frac{n}{2}-s$, ya que en el otro semiplano abierto tiene que haber un número de puntos de la nube menor o igual que $\frac{n}{2}+s-2$, para que no haya un cierre convexo de $\frac{n}{2}+s$ puntos de la nube que evite a p_1. Entonces, la recta que une p con p_2 deja en el semiplano abierto en el que están los menores angularmente que p_2 un número de puntos de la nube mayor o igual que $\frac{n}{2}-s+1$, ya que están los anteriores y p_1.

Análogamente, la recta que une p con p_l deja en el semiplano abierto en el que están los puntos de la nube menores angularmente que p_l un número de puntos de la nube mayor o igual que $\frac{n}{2}-s+l-1 > \frac{n}{2}+s-2$, luego el cierre convexo de $\frac{n}{2}+s-1$ de esos puntos y p evitará a p_l, contradicción con que p_l pertenece a $I_{n,s}$. □

Observación 2.8. Por tanto, si n es par y $s < \frac{n}{2}$, el máximo número de puntos de la nube que puede haber en I_n es menor o igual que $2s-1$.

Ejemplo 2.9. Vamos a ver ejemplos en los que se alcanza la cota superior anterior para todo $n > 2s$, por lo que el máximo número de puntos en la intersección será $2s-1$ si n par:

Ponemos $n-(2s-1)$ puntos de la nube en posición convexa, y los $2s-1$ restantes en $I_{n-(2s-2),2}$, en posición general con los anteriores. Entonces, si tomamos un cierre convexo de $\frac{n}{2}+s$ puntos de la nube entre los que no estén todos los $2s-1$ considerados, habrá al menos $\left\lceil \frac{n-(2s-1)}{2} \right\rceil + 2$ puntos de los $n-(2s-1)$ puntos de la nube restantes, luego en el cierre convexo estarán los $2s-1$ puntos considerados por lo que estos estarán en $I_{n,s}$ (ver figura 2).

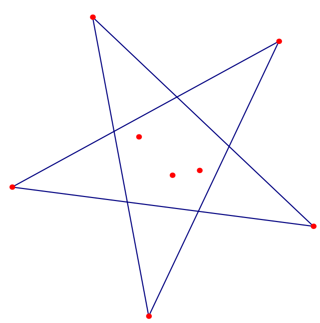

Figura 2: Caso en que $I_{8,2}$ contiene al máximo número posible de puntos de la nube: 3

Observación 2.10. El resultado anterior para n par y $s = \frac{n}{2}-k$ nos da un máximo de $2\left(\frac{n}{2}-k\right)-1 = n-2k-1$ puntos de la nube en I_k, luego el mínimo número de puntos de la nube que participan en algún k-set es menor o igual que $2k+1$ para n par por la proposición 2.3. Para n impar y $s = \frac{n+1}{2}-k$, el resultado anterior nos da un máximo de $2\left(\frac{n+1}{2}-k\right)-2 = n-2k-1$ puntos de la nube en I_k, luego en este caso también el mínimo número de puntos de la nube que participan en algún k-set es menor o igual que $2k+1$.

Vamos a ver que todo punto de la nube que no esté en I_k, está en algún k-set, por lo que el mínimo número de puntos de la nube que participan en algún k-set será $2k+1$:

Proposición 2.11. *Sea un punto p de la nube no perteneciente a la I_k, entonces existe un k-set que contiene a p.*

Demostración. Como $p \notin I_k$, entonces existe un cierre convexo de $n-k$ puntos de la nube al que no pertenece p, por lo que podemos encontrar una recta R que separa p del cierre convexo. Entonces, en el semiplano que define R en el que está p, habrá un número menor o igual que k de puntos de la nube. Entonces, si el número de puntos de la nube en ese semiplano es menor que k, si barremos con rectas paralelas a R que se alejan de p, encontraremos una recta R' que deja en el semiplano que define en el que está p exactamente k puntos de la nube. □

Observación 2.12. Si nos planteamos el problema análogo del mínimo número de puntos de la nube de n puntos que pueden intervenir en un $(\leq k)$-sets, vemos que éste es también $2k+1$, ya que los puntos que pueden intervenir en l-sets si $l < k$ son los que pueden intervenir en k-sets, debido a que $I_k \subset I$ si $l < k$, luego los puntos que no pueden intervenir en k-sets tampoco pueden intervenir en l-sets si $l < k$.

2.2 Mínimo número de k-set

Vamos a ver ahora que el mínimo número de k-sets en un conjunto de n puntos es también $2k+1$ si $k < \frac{n}{2}$ y los puntos están en posición general. Vemos primero la cota superior con un ejemplo que es básicamente el expuesto en [3] pero en el que se detalla lo cerca del centro que deben estar los puntos del interior para que dicho ejemplo sea válido, en $I_{2k+1,2}$ siendo $\{1, \ldots, 2k+1\}$ los puntos de la frontera:

Ejemplo 2.13. En los ejemplos anteriores en los que se alcanzaba el máximo número de puntos de la nube en $I_{n,s}$, si tomamos $s = \frac{n}{2} - k$ para n par y $s = \frac{n+1}{2} - k$ para n impar, tenemos que sólo los $2k+1$ puntos de la frontera del cierre convexo de los n puntos pueden intervenir en k-sets, como vimos anteriormente. Pero en este caso, sólo se puede asignar un k-set distinto a cada punto de la frontera, ya que si etiquetamos estos en el sentido de las agujas del reloj como $1, \ldots, 2k+1$, tenemos que los únicos k-sets que hay son $\{1, \ldots, k\}$,..., $\{2k+1, \ldots, k-1\}$, luego el número de k-sets en estos ejemplos es $2k+1$ (ver figura 3).

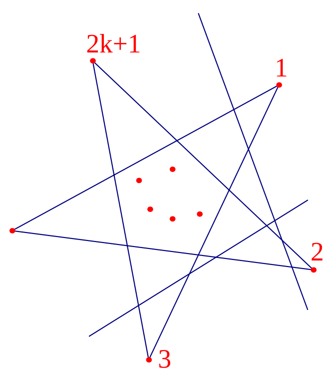

Figura 3: Ejemplo de n puntos en posición general con $2k+1$ k-set

Vamos a ver que también se da la cota inferior de $2k+1$ para el mínimo número de k-sets. Para comprobarlo, vemos que se puede asignar un k-set distinto a cada punto que no está en I_k, luego como hay al menos $2k+1$ puntos de la nube en esa intersección, hay al menos $2k+1$ k-sets:

Proposición 2.14. *Se puede asignar un k-set distinto a cada punto no perteneciente a I_k.*

Demostración. Sea $p \notin I_k$, existe un cierre convexo de $n-k$ puntos de la nube al que no pertenece p, y de forma que la recta que une p con un soporte del cierre convexo, llamémosle v, deja a los $n-k$ puntos del cierre convexo formando un ángulo con p mayor que el que forma v. Entonces, como $n-k > k$, hay una recta que pasa por p y otro punto de la nube, v', que deja $k+1$ puntos en el semiplano cerrado donde están los que forman un ángulo con p mayor o igual que el que forma v', y $n-k-1$ en el otro semiplano abierto. Entonces a p se le puede asignar el k-set en el que está él y los $k-1$ puntos en el semiplano abierto donde están los que forman un ángulo con p mayor que el que forma v'.

Vemos que el k-set asignado es distinto para cada p:

Si el k-set asignado a p' es el mismo que el asignado a p, con p distinto a p', entonces si definimos $p = (0,0,0)$, $v' = (a,b,0)$, $p' = (c,d,0)$, se cumple que $pv' \times pp'$ debe tener la 3.ª componente positiva para que p' esté en el semiplano positivo que generan p y v' ($ad - bc > 0$). Por otro lado, el v' correspondiente a p', llamémoslo $v'' = (e,f,0)$, no está en ese semiplano, luego $af - be < 0$ (ver figura 4). Entonces, para que p esté en el semiplano positivo de los que forman p' y v'', se ha de cumplir que $p'v'' \times p'p = (e-c, f-d, 0) \times (-c, -d, 0)$ tiene la 3.ª componente mayor que 0 ($cf - de > 0$). Para que v' esté en el semiplano opuesto, se ha de cumplir que $(e-c, f-d, 0) \times (a-c, b-d, 0)$ tenga la 3.ª componente negativa ($-af + ad + cf + be - bc - de < 0$) (ver figura 5). Las desigualdades establecidas son contradictorias. $\square$

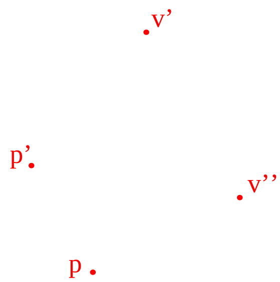

Figura 4

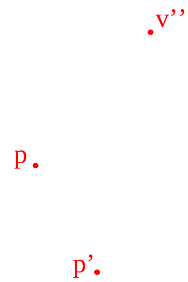

Figura 5

3 Conclusiones

Se ha planteado el problema de hallar el mínimo número de puntos en una nube de n puntos en posición general que pueden intervenir en k-set, $(\leq k)$-set. Se establece ese número como $2k+1$. Se han utilizado técnicas basadas en la intersección de cierres convexos, distintas a las presentadas en Lovasz et al. ([3]) que aplican la búsqueda del mínimo número de j-aristas.

La cota inferior a la que se llega para el mínimo número de k-set, que es el número de puntos que no están en I_k, depende de la posición de los n puntos del conjunto considerado. Es en general más precisa que $2k+1$, lo que puede dar cotas inferiores más ajustadas al número de cuadriláteros convexos ([3]) que se pueden dar en conjuntos de n puntos en posición general. Dicho ajuste se puede realizar por medio del cálculo del número de puntos que hay en I_k, para $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, lo que se puede realizar de forma eficiente.

Referencias

[1] Aichholzer O, García J, Orden D and Ramos P (2006). New lower bounds for the number of $(\leq K)$-edges and the rectilinear crossing number of K_n. *Discrete and Computational Geometry*. In press. Available at `http://arxiv.org/abs/math.CO/0608610`.

[2] Balogh J, Salazar G (2006). On k-sets, convex quadrilaterals, and the rectilinear crossing number of K_n. *Discrete and Computational Geometry*, 35, 671–690.

[3] Lovasz L, Vesztergombi K, Warner U and Welzl E (2004). Convex Quadrilaterals and k-sets, J. Pach (Ed.) *Contemporary Mathematics*, 342, 139-148.

[4] Pach J, Solymosi J (1999). Halving lines and perfect cross-matchings. *Contemporary Mathematics*, 223, 245–249.