

# Sobre la extensión a 3D de la configuración de Pappus \*

Eugenio Roanes Macías †

Eugenio Roanes Lozano ‡

## Resumen

Se trata de extender a 3 dimensiones la configuración relativa al teorema de Pappus: “dada una línea poligonal cerrada de seis lados, cuyos vértices yacen alternativamente sobre dos rectas, los tres puntos de intersección de rectas-lados opuestas son colineales”. La extensión natural a 3D de este teorema sería: “dada una línea poligonal cerrada de ocho lados, cuyos vértices yacen alternativamente sobre dos planos, los cuatro puntos de intersección de rectas-lados opuestas son coplanarias”. El objetivo del trabajo es determinar bajo qué condiciones la configuración relativa a dicha extensión existe.

## Introducción

Hace tiempo que venimos ocupándonos de la extensión a 3D de teoremas geométricos clásicos, utilizando métodos computacionales, como puede verse en [3, 4, 5, 6, 7, 9].

El teorema de Pappus de Alejandría mencionado en el resumen es bien conocido y aparece probado en cualquier tratado clásico de geometría, como [1, 2], por ejemplo. El problema de la extensión a 3D de la configuración geométrica contenida en el teorema de Pappus, que ya habíamos iniciado brevemente en [8], como aplicación de deducción automática en geometría, se desarrolla con minuciosidad en el presente trabajo.

Pese a la aparente simplicidad del problema, la excesiva extensión de las expresiones que aparecen en tal desarrollo obliga a utilizar un sistema de cómputo algebraico (o un sistema de geometría dinámica con cálculo simbólico y aritmética exacta). Para ejecutar los cálculos con comodidad haremos uso del paquete `paramGeo3D` desarrollado sobre Maple por los autores. Este paquete ha ido evolucionando en sus sucesivas aplicaciones de extensiones a 3D que hemos ido desarrollando [5, 6, 7, 8]. En esta ocasión, utilizaremos los mínimos comandos posibles del paquete, en aras de la brevedad de exposición.

Siendo un problema de incidencia e intersección y, por tanto de naturaleza proyectiva, lo estudiaremos en el espacio proyectivo real de 3 dimensiones.

## 1 Generación constructiva de la configuración clásica 2D

Comenzamos describiendo en detalle la generación constructiva de la configuración clásica de Pappus, por ser de interés para la extensión del problema a 3D desarrollada en la sección siguiente.

Dadas dos rectas distintas,  $\alpha$  y  $\beta$ , del plano proyectivo real, sean (Figura 1):

- 1)  $A_1$  un punto de  $\alpha$ , no perteneciente a  $\beta$
- 2)  $B_1$  un punto de  $\beta$ , no perteneciente a  $\alpha$
- 3)  $L_1$  la recta  $A_1B_1$

---

\*Parcialmente subvencionado por el Proyecto de Investigación *MTM2004-03175* (Ministerio de Educación y Ciencia) y la ayuda 2006 de la Universidad Complutense - Comunidad de Madrid (IV-PR1) al grupo de investigación *910563-ACEIA*.

†Departamento de Álgebra, Universidad Complutense de Madrid, `roanes@mat.ucm.es`

‡Departamento de Álgebra, Universidad Complutense de Madrid, `eroanes@mat.ucm.es`

- 4)  $A_2$  un punto de  $\alpha$ , no perteneciente a  $\beta$  y distinto de  $A_1$
- 5)  $L_2$  la recta  $B_1A_2$
- 6)  $B_2$  un punto de  $\beta$ , no perteneciente a  $\alpha$  y distinto de  $B_1$
- 7)  $L_3$  la recta  $A_2B_2$
- 8)  $A_3$  un punto de  $\alpha$ , no perteneciente a  $\beta$  y distinto de  $A_1$  y de  $A_2$
- 9)  $L_4$  la recta  $B_2A_3$
- 10)  $B_3$  un punto de  $\beta$ , no perteneciente a  $\alpha$  y distinto de  $B_1$  y de  $B_2$
- 11)  $L_5$  la recta  $A_3B_3$
- 12)  $L_6$  la recta  $B_3A_1$
- 13)  $P_1$  el punto de intersección de  $L_1$  y  $L_4$
- 14)  $P_2$  el punto de intersección de  $L_2$  y  $L_5$
- 15)  $P_3$  el punto de intersección de  $L_3$  y  $L_6$ .

Entonces los tres puntos de intersección,  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , son colineales (teorema de Pappus). Por ello, dicha configuración se denomina *configuración de Pappus*. A la recta que pasa por  $P_1, P_2, P_3$  la llamaremos *línea de puntos de intersección* de la configuración.

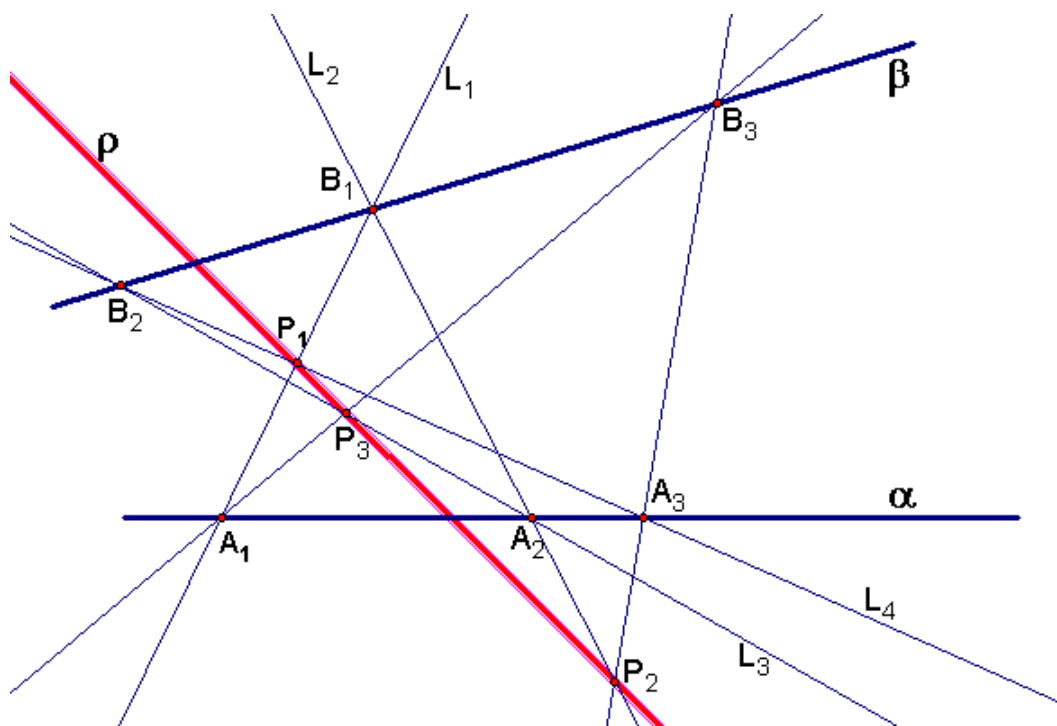


Figura 1: Configuración clásica 2D de Pappus

Para lo que sigue, tiene interés plantearse la siguiente cuestión.

**Conjetura 1.1.** Dadas las rectas  $\alpha$  y  $\beta$ , existe una configuración de Pappus, cuya línea de puntos de intersección sea una recta prefijada arbitraria,  $\rho$ , distinta de  $\alpha$  y de  $\beta$ .

Es fácil comprobar que la respuesta es afirmativa. En efecto, eligiendo en la recta  $\rho$  dos puntos distintos,  $P_1$  y  $P_2$ , no pertenecientes a  $\alpha$  ni a  $\beta$ , pueden considerarse los puntos siguientes: un punto arbitrario  $A_1$  en la recta  $\alpha$ ; el punto común  $B_1$  de las rectas  $A_1P_1$  y  $\beta$ ; el punto común  $A_2$  de las rectas  $B_1P_2$  y  $\alpha$ ; un punto arbitrario  $B_2$  en la recta  $\beta$ ; el punto común  $A_3$  de las rectas  $B_2P_1$  y  $\alpha$ ; el punto común  $B_3$  de las rectas  $A_3P_2$  y  $\beta$ ; el punto común  $P_3$  de las rectas  $A_2B_2$  y  $B_3A_1$ , el cual estará en la recta  $P_1P_2$ , de acuerdo con el teorema de Pappus. En consecuencia, los tres puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , están en la recta prefijada  $\rho$ .

## 2 Extensión a 3D del problema

Se trata de extender a 3D la configuración de Pappus considerada en la sección precedente. Para efectuar dicha extensión de modo natural, habremos de sustituir las rectas  $\alpha$  y  $\beta$  por dos planos y los tres puntos colineales  $P_1, P_2, P_3$  por cuatro puntos coplanarios y, en consecuencia, la poligonal cerrada de seis vértices por otra de ocho y la línea de puntos de intersección por un plano de puntos de intersección. Ahora bien, las rectas-lados opuestas de una poligonal de ocho vértices en el espacio de dimensión 3 ya no tienen por qué ser coplanarias, lo que cuestiona la existencia de los puntos de intersección de dichas rectas-lados opuestas. Todo ello, conduce a plantear la siguiente conjetura.

**Conjetura 2.1.** Consideremos, en el espacio proyectivo real de dimensión 3, una línea poligonal cerrada de ocho lados, cuyos vértices yacen alternativamente en dos planos y tales que tres de sus rectas-lados sean coplanarias con sus respectivas opuestas. Entonces se verifican:

- 1) las dos rectas-lados opuestas restantes son también coplanarias
- 2) los cuatro puntos de intersección de rectas-lados opuestas son coplanarios.

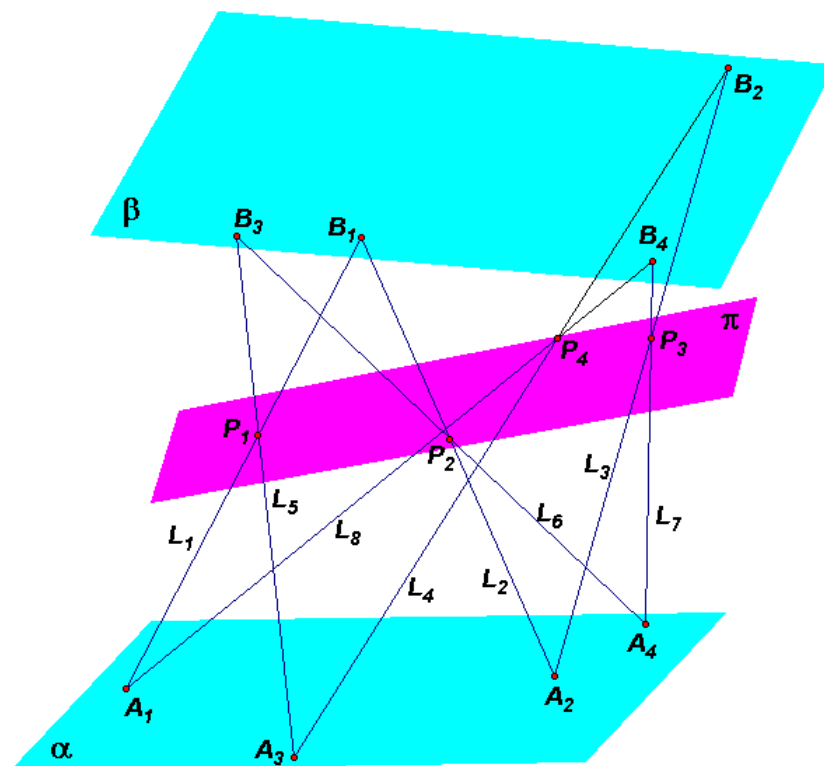


Figura 2: Configuración de Pappus 3D

Denotaremos por  $\alpha$  y  $\beta$  a los planos y por  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4$  a los vértices consecutivos de la línea poligonal, de modo que  $A_1, A_2, A_3, A_4$  estén en  $\alpha$  y  $B_1, B_2, B_3, B_4$  en  $\beta$  (Figura 2). Denotaremos a las rectas-lados de la línea poligonal cerrada por  $L_1 = A_1B_1, L_2 = B_1A_2, L_3 = A_2B_2, L_4 = B_2A_3, L_5 = A_3B_3, L_6 = B_3A_4, L_7 = A_4B_4$  y  $L_8 = B_4A_1$ . Las rectas-lados opuestas, caso de ser coplanarias, serán secantes (por estar en el espacio proyectivo), y a sus puntos de intersección los denotaremos entonces  $P_1 = L_1 \cap L_5, P_2 = L_2 \cap L_6, P_3 = L_3 \cap L_7$  y  $P_4 = L_4 \cap L_8$ . En caso de existir tales puntos de intersección, al plano que determinan los tres primeros (supuestos no colineales) lo denotaremos por  $\pi$ .

Nuestro problema consiste pues en confirmar la existencia de  $P_4$  y, en tal caso, averiguar si es coplanario con  $P_1, P_2, P_3$ , o no lo es.

## 2.1 Generación constructiva de la configuración 3D

Se trata de describir una generación constructiva de la poligonal cerrada de ocho vértices, que extienda a 3 dimensiones la indicada para 2D en la sección 1. Pero ahora, por estar en el espacio 3D, ha de permitir asegurar que las tres primeras rectas-lados sean coplanarias con sus respectivas opuestas.

Puesto que los cuatro primeros lados de la línea poligonal pueden elegirse de modo arbitrario, en consecuencia, los cinco primeros vértices,  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3$ , pueden elegirse libremente, con tal de que no haya cuatro coplanarios (para evitar que la configuración generada sea plana, con lo que estaríamos en el caso considerado en la sección 1). A estos cinco puntos los denominaremos en adelante *puntos iniciales de la configuración*.

Entonces,  $\alpha$  es el plano que pasa por los tres puntos  $A_1, A_2, A_3$  (notemos que no pueden ser colineales, por no haber cuatro colineales entre los cinco puntos iniciales de la configuración). Ahora, a fin de determinar el plano  $\beta$ , se considera un nuevo punto auxiliar,  $B_0$ , no colineal con  $B_1$  y  $B_2$ . Entonces,  $\beta$  es el plano que pasa por los tres puntos  $B_0, B_1, B_2$ . Los cuatro primeros lados de la poligonal,  $L_1 = A_1B_1, L_2 = B_1A_2, L_3 = A_2B_2, L_4 = B_2A_3$ , quedan pues ya determinados.

Se trata ahora de determinar el sexto punto  $B_3 \in \beta$ , de modo que  $L_5$  y  $L_1$  sean coplanarias. Para ello, puede elegirse un punto  $P_1 \in L_1$ , distinto de  $A_1$  y de  $B_1$ . Dicho punto puede ser determinado por  $\lambda_1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , de modo que, para  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ , sea  $P_1 = (1 - \lambda_1)A_1 + \lambda_1 B_1$  (donde  $0 \neq \lambda_1 \neq 1$ , para que sea  $A_1 \neq P_1 \neq B_1$ ) y para  $\lambda_1 = \infty$ , sea  $P_1$  el punto impropio de  $L_1$ . Ya podemos definir  $L_5$  como la recta  $P_1A_3$  y determinar  $B_3$  como el punto  $L_5 \cap \beta$ . En consecuencia,  $L_5$  y  $L_1$  son coplanarias, siendo  $P_1$  su punto común.

El séptimo punto  $A_4 \in \alpha$  puede definirse análogamente, de modo que  $L_6$  y  $L_2$  sean coplanarias. Para ello, elegimos un punto  $P_2 \in L_2$ , distinto de  $B_1$  y de  $A_2$ . Dicho punto puede ser determinado por  $\lambda_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , de modo que, para  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ , sea  $P_2 = (1 - \lambda_2)B_1 + \lambda_2 A_2$  (eligiendo  $0 \neq \lambda_2 \neq 1$ , para que sea  $B_1 \neq P_2 \neq A_2$ ) y para  $\lambda_2 = \infty$ , sea  $P_2$  el punto impropio de  $L_2$ . Ya podemos definir  $L_6$  como la recta  $P_2B_3$  y determinar  $A_4$  como el punto  $L_6 \cap \alpha$ . En consecuencia,  $L_6$  y  $L_2$  son coplanarias, siendo  $P_2$  su punto común.

El octavo punto  $B_4 \in \beta$  puede definirse de modo similar, para que  $L_7$  y  $L_3$  sean coplanarias. Para ello, elegimos un punto  $P_3 \in L_3$ , distinto de  $A_2$  y de  $B_2$ . Dicho punto puede ser determinado por  $\lambda_3 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , de modo que, para  $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ , sea  $P_3 = (1 - \lambda_3)A_2 + \lambda_3 B_2$  (eligiendo  $0 \neq \lambda_3 \neq 1$ , para que sea  $A_2 \neq P_3 \neq B_2$ ) y para  $\lambda_3 = \infty$ , sea  $P_3$  el punto impropio de  $L_3$ . Ya podemos definir  $L_7$  como la recta  $P_3A_4$  y determinar  $B_4$  como el punto  $L_7 \cap \beta$ . En consecuencia,  $L_7$  y  $L_3$  son coplanarias, siendo  $P_3$  su punto común.

Finalmente, la última recta-lado de la poligonal cerrada será obviamente  $L_8 = B_4A_1$ .

Una vez completada la poligonal, se ha de comprobar la validez de cada uno de los dos asertos considerados en la conjetura 2.1.

Para comprobar si las rectas  $L_4 = B_2A_3$  y  $L_8 = B_4A_1$  son coplanarias, lo que haremos es comprobar si el punto  $B_4$  está en el plano  $A_1B_2A_3$ , que denotaremos por  $\omega$  (notemos que los puntos  $A_1, B_2, A_3$  no pueden ser colineales, ya que, por hipótesis,  $B_2$  no pertenece al plano  $\alpha$ , que contiene a los puntos  $A_1, A_2$ ). Para efectuar esta comprobación, bastará pues sustituir las coordenadas de  $B_4$  en la ecuación de  $\omega$ , calculando si resulta cero o no.

En caso afirmativo, para comprobar si los puntos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  son coplanarios, lo que haremos es comprobar si el punto  $P_4$  está en el plano  $P_1P_2P_3$ , que denotaremos por  $\pi$  (notemos que los puntos  $P_1, P_2, P_3$  no pueden ser colineales, ya que, por hipótesis, los puntos  $A_1, B_1, A_2, B_2$  no son colineales). Para efectuar esta comprobación, bastará pues sustituir las coordenadas de  $P_4$  en la ecuación de  $\pi$ , calculando si resulta cero o no.

Al tratar de efectuar tales comprobaciones aparecen expresiones muy largas, que obligan a realizar los cálculos con ayuda de un sistema de cómputo algebraico o con un sistema de geometría dinámica 3D con cálculo simbólico y aritmética exacta accesibles.

## 2.2 Algoritmo para el análisis de la conjetura 2.1

*Entradas o "input":*

Puntos  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3$ , tales que cada cuatro de ellos sean no coplanarios

Punto  $B_0$ , no colineal con  $B_1$  y  $B_2$

*Salidas o "output":*

$r$  (resultado de sustituir las coordenadas de  $B_4$  en la ecuación del plano  $\omega = A_1B_2A_3$ )

$p$  (resultado de sustituir las coordenadas de  $P_4$  en la ecuación del plano  $\pi = P_1P_2P_3$ )

*Pasos o "steps":*

1.  $\alpha :=$ plano  $A_1A_2A_3$
2.  $\beta :=$ plano  $B_1B_2B_0$
3.  $L_1 :=$ recta  $A_1B_1$
4.  $L_2 :=$ recta  $B_1A_2$
5.  $L_3 :=$ recta  $A_2B_2$
6.  $L_4 :=$ recta  $B_2A_3$
7. Elegir  $\lambda_1$  como parámetro indeterminado, o bien como elemento de  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ( $0 \neq \lambda_1 \neq 1$ )
8.  $P_1 := (1 - \lambda_1)A_1 + \lambda_1B_1$ , si  $\lambda_1 \neq \infty$ , y  $P_1 :=$ punto impropio de  $L_1$ , en otro caso
9.  $L_5 :=$ recta  $P_1A_3$
10.  $B_3 := L_5 \cap \beta$
11. Elegir  $\lambda_2$  como parámetro indeterminado, o bien como elemento de  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ( $0 \neq \lambda_2 \neq 1$ )
12.  $P_2 := (1 - \lambda_2)B_1 + \lambda_2A_2$ , si  $\lambda_2 \neq \infty$ , y  $P_2 :=$ punto impropio de  $L_2$ , en otro caso
13.  $L_6 :=$ recta  $P_2B_3$
14.  $A_4 := L_6 \cap \alpha$
15. Elegir  $\lambda_3$  como parámetro indeterminado, o bien como elemento de  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ( $0 \neq \lambda_3 \neq 1$ )
16.  $P_3 := (1 - \lambda_3)A_2 + \lambda_3B_2$ , si  $\lambda_3 \neq \infty$ , y  $P_3 :=$ punto impropio de  $L_3$ , en otro caso
17.  $L_7 :=$ recta  $P_3A_4$
18.  $B_4 := L_7 \cap \beta$
19.  $L_8 := B_4A_1$
20.  $\omega :=$ plano  $A_1B_2A_3$
21.  $r := \omega(B_4)$
22.  $P_4 := L_4 \cap L_8$
23.  $\pi :=$ plano  $P_1P_2P_3$
24. Si  $\lambda_3 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , entonces:  
 $p := \pi(P_4)$ , es decir, resultado de sustituir las coordenadas de  $B_4$  en la ecuación de  $\omega$
25. Si  $\lambda_3$  se eligió como parámetro indeterminado, entonces:
  - 25.1  $\lambda_3 :=$ solución de la ecuación  $p = 0$ , distinta de 0 y de 1
  - 25.2  $P_3 := (1 - \lambda_3)A_2 + \lambda_3B_2$
  - 25.3  $L_7 :=$ recta  $P_3A_4$
  - 25.4  $B_4 := L_7 \cap \beta$
  - 25.5  $L_8 := B_4A_1$
  - 25.6  $P_4 := L_4 \cap L_8$
  - 25.7  $\pi :=$ plano  $P_1P_2P_3$
  - 25.8  $p := \pi(P_4)$ , es decir, resultado de sustituir las coordenadas de  $P_4$  en la ecuación de  $\pi$

## 2.3 Resultados

Al ejecutar el paso 21 del algoritmo anterior, se obtiene valor cero para  $r$ , lo que permite asegurar que  $B_4 \in \omega$  y, en consecuencia, las rectas  $L_4$  y  $L_8$  son coplanarias. Por tanto, el aserto expresado en el apartado 1 de la conjetura 2.1 es cierto. De ello resulta el teorema siguiente.

**Teorema 2.2.** *Sea una línea poligonal cerrada de ocho lados, cuyos vértices yacen alternativamente en dos planos distintos y tales que tres lados consecutivos no sean coplanarios. Si tres de sus rectas-lados son coplanarias con sus respectivas opuestas, entonces su cuarta recta-lado es también coplanaria con su opuesta.*

Al ejecutar el paso 24 del algoritmo anterior, se obtiene, en general, valor cero para  $p$ , por lo que

$P_4$  no está en el plano  $\pi$ , es decir, los puntos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  no resultan ser coplanarios. Por tanto, el aserto expresado en el apartado 2 de la conjetura 2.1 no es cierto, en general.

Sin embargo, vamos a ver que para cada posición de los puntos iniciales de la configuración, existe una doble infinidad de posiciones de los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , para los cuales si es cierto el aserto del apartado 2 de la conjetura 2.1.

En efecto, supuesto que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  son parámetros indeterminados, al ejecutar el paso 24 del algoritmo anterior, se obtiene una expresión polinómica, que al ser factorizada queda en la forma:

$$p = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1)\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (1)$$

siendo

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = c_{123}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + c_{12}\lambda_1\lambda_2 + c_{23}\lambda_2\lambda_3 + c_{31}\lambda_3\lambda_1 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 + c_0 \quad (2)$$

donde los coeficientes  $c_{ij..}$  son expresiones polinómicas cuyas variables son las coordenadas simbólicas (no numéricas) de los puntos iniciales de la configuración y del punto auxiliar  $B_0$ .

Notemos que el aserto expresado en el apartado 2 de la conjetura 2.1 es cierto si y sólo si se verifica la condición  $p = 0$ . Y esta condición implica la anulación de alguno de los cuatro factores de (1). Ahora bien, la anulación del primero de esos factores contradiría la hipótesis  $0 \neq \lambda_1 \neq 1$  (incluida para que  $A_1 \neq P_1 \neq B_1$ , puesto que, si  $\lambda_1 = 1$ , resultaría  $P_1 = (1 - \lambda_1)A_1 + \lambda_1 B_1 = B_1$ ). Por análoga razón, los factores segundo y tercero de (1) deben ser no nulos. Por tanto, la condición  $p = 0$  requiere la anulación de la expresión polinómica (2).

Al ser  $\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  un polinomio de grado 1 en cada una de sus tres indeterminadas, puede expresarse  $\lambda_3$  como función racional de las otras dos

$$\lambda_3 = -\frac{c_{12}\lambda_1\lambda_2 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_0}{c_{123}\lambda_1\lambda_2 + c_{23}\lambda_2 + c_{31}\lambda_1 + c_3} \quad (3)$$

de modo que, para cada valores fijos asignados a  $\lambda_1$  y a  $\lambda_2$ , se obtiene un valor único para  $\lambda_3 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Finalmente, si a partir del valor de  $\lambda_3$  dado por (3), se ejecutan los pasos 25.2 al 25.8 del algoritmo, se obtiene valor cero para  $p$ . En resumen, para cada valor de  $\lambda_1$  y de  $\lambda_2$ , se ha obtenido un único valor de  $\lambda_3$ , para el cual  $P_4(\lambda_1, \lambda_2) \in \pi(\lambda_1, \lambda_2)$ . En consecuencia, para cada elección de  $P_1 \in L_1$  y de  $P_2 \in L_2$ , existe un único  $P_3 \in L_3$ , tal que  $P_1, P_2, P_3, P_4$  son coplanarios. Todo ello permite expresar el siguiente resultado.

**Teorema 2.3.** *Dados dos planos distintos,  $\alpha$  y  $\beta$ , en el espacio proyectivo real de dimensión 3, existe una configuración de Pappus cuyos vértices yacen alternativamente en los planos  $\alpha$  y  $\beta$ . Sus cinco puntos iniciales,  $A_1, A_2, A_3 \in \alpha$  y  $B_1, B_2 \in \beta$ , pueden ser libremente elegidos (con tal de que estén en sólo uno de los dos planos y no haya cuatro coplanarios). También los puntos de intersección de las dos primeras aristas con sus respectivas opuestas,  $P_1 \in L_1$  y  $P_2 \in L_2$ , pueden ser libremente elegidos (excluyendo los puntos comunes de  $L_1$  y  $L_2$  con  $\alpha$  y  $\beta$ ), pero entonces el tercer punto de intersección,  $P_3 \in L_3$ , queda determinado unívocamente por  $P_1$  y  $P_2$ .*

## 2.4 Implementación y ejecución

El proceso constructivo descrito requiere hacer uso de cálculo simbólico y también de aritmética exacta (para asegurar decisiones correctas en los condicionales), lo que exige que la implementación se realice en un sistema computacional que disponga de ambas posibilidades. Para ejecutarlo hemos utilizado nuestro paquete `paramGeo3D`, mencionado en la introducción, que contiene, entre otros muchos, los siguientes comandos, de utilidad para nuestro problema:

- `point`, que aplicado a las coordenadas homogéneas de un punto, devuelve la lista de ellas
- `line`, que aplicado a dos puntos distintos,  $A$  y  $B$ , devuelve la lista de ecuaciones de la recta  $AB$
- `plane`, que aplicado a tres puntos no coplanarios,  $A, B, C$ , devuelve la ecuación del plano  $ABC$
- `pointOnLine`, que aplicado a  $\lambda$  (parámetro indeterminado o  $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ), y a los puntos  $A$  y  $B$ ,

devuelve el punto  $(1 - \lambda)A + \lambda B$ , si  $r \neq \infty$ , o devuelve el punto impropio de  $AB$ , si  $r = \infty$   
**intersection**, que aplicado a recta y plano, o a rectas coplanarias, devuelve su punto común  
**isPlaced**, que aplicado a un punto  $P$  y a un plano  $\delta$ , devuelve el resultado de sustituir las coordenadas de  $P$  en la ecuación de  $\delta$

**Ejemplo 2.4.** Respecto de un sistema de referencia proyectivo apropiado, los puntos iniciales de la configuración y el punto auxiliar  $B_0$  pueden ser elegidos, sin pérdida de generalidad, en la forma:

$$A_1(1, 0, 0, 0), A_2(1, 1, 0, 0), A_3(1, 0, 1, 0), B_1(1, u, v, w), B_2(1, r, s, t), B_0(1, 0, 0, z) \quad (4)$$

Una vez cargado el paquete **paramGeo3D** en una *worksheet* de Maple, puede implementarse el algoritmo de la subsección 2.2, ejecutando el siguiente código (las salidas son omitidas por brevedad, exceptuando los esenciales, ya que varios de ellos son expresiones enormemente extensas):

```
A[1]:=point(1,0,0,0);
A[2]:=point(1,1,0,0);
A[3]:=point(1,0,1,0);
B[1]:=point(1,u,v,w);
B[2]:=point(1,r,s,t);
alpha:=plane(A[1],A[2],A[3]);
B[0]:=point(1,0,0,z);
beta:=plane(B[1],B[2],B[0]);
L1:=line(A[1],B[1]);
L2:=line(B[1],A[2]);
L3:=line(A[2],B[2]);
L4:=line(B[2],A[3]);
P[1]:=pointOnLine(lambda[1],A[1],B[1]);
L5:=line(P[1],A[3]);
B[3]:=intersection(L5,beta);
P[2]:=pointOnLine(lambda[2],B[1],A[2]);
L6:=line(B[3],P[2]);
A[4]:=intersection(L6,alpha);
P[3]:=pointOnLine(lambda[3],A[2],B[2]);
L7:=line(A[4],P[3]);
B[4]:=intersection(L7,beta);
L8:=line(B[4],A[1]);
omega:=plane(A[1],B[2],A[3]);
isPlaced(P[4],omega);

0

P[4]:=intersection(L8,L4);
pi:=plane(P[1],P[2],P[3]);
h:=isPlaced(P[4],pi);
h:=factor(h);
h:=(lambda_2-1)*(-1+lambda_1)*(-1+lambda_3)*(-w*lambda_3*r*v*z*lambda_2-w*lambda_3*u*s*z-w*u*s*z*lambda_2-2*lambda_3*t*lambda_1*v^2*r*z*lambda_2+2*v*lambda_3*t*lambda_1*u*s*z*lambda_2-v*lambda_1*lambda_2*u*z*lambda_3*t+v*lambda_1*lambda_2*t^2*u*lambda_3+w*r*v*z*lambda_2+2*w*lambda_1*lambda_2*r*v*z*lambda_3*s-w*lambda_1*lambda_2*r*z*lambda_3*s-2*w*lambda_1*lambda_2*u*s^2*z*lambda_3-w*lambda_1*lambda_2*t*u*lambda_3*s+lambda_1*w*lambda_3*u*s*z*lambda_2-lambda_1*w*lambda_3*r*v*z+lambda_1*w*lambda_3*u*s*z+lambda_1*w*r*v*z-v*lambda_1*lambda_2*r*w*lambda_3*t+lambda_1*w*u*s*z*lambda_2-lambda_1*w*r*v*z*lambda_2+lambda_3*t*u*r*v*z-w*r*v*z-lambda_1*w*u*s*z-r*w*lambda_3*u*s*z*lambda_2+r^2*w*lambda_3*v*z*lambda_2+lambda_1*lambda_2*r*w^2*lambda_3*s+w*lambda_3*u*s*z*lambda_2+w*lambda_3*r*v*z+r*w*lambda_3*u*s*z-r*w*lambda_3*lambda_1*u*s*z+r^2*w*lambda_3*lambda_1*v*z-lambda_3*t*u^2*s*z+lambda_3*t*u^2*lambda_1*s*z+w*u*s*z-lambda_3*t*u*lambda_1*r*v*z-r^2*w*lambda_3*v*z+lambda_3*t*lambda_1*v*r*z*lambda_2+lambda_2*lambda_3*t*r*v*z-lambda_3*lambda_2*t*u*r*v*z+lambda_3*lambda_2*t*u^2*s*z-lambda_2*lambda_3*t*u*s*z);
psi:=simplify(h/((-1+lambda[3])*(lambda[2]-1)*(-1+lambda[1])));
phi:=solve(psi=0,lambda[3]);
P[3]:=pointOnLine(phi,A[3],B[3]);
P[3]:=simplify(expand(P[3]));
pi:=plane(P[1],P[2],P[3]);
L7:=line(A[4],P[3]);
B[4]:=intersection(L7,beta);
```

```
L8:=line(B[4],A[1]);
P[4]:=intersection(L8,L4);
isPlaced(P[4],pi);
```

0

### 3 Conclusiones

Aunque la extensión natural a 3D del teorema de Pappus no sea cierta, en general, sin embargo, si son ciertos en 3D dos resultados más débiles relativos a dicha extensión. El resultado expresado en el teorema 2.2 es imprescindible para asegurar la existencia de la configuración en 3D (aunque era innecesario en dimensión 2, por tratarse allí de una configuración en el plano). Y en el resultado expresado en el teorema 2.3, se afirma que, dados los planos  $\alpha$  y  $\beta$ , el plano de intersecciones  $\pi = P_1 P_2 P_3$  puede ser elegido con dos grados de libertad, estando  $P_3$  unívocamente determinado por  $P_1$  y  $P_2$ .

### Referencias

- [1] M. Berger, *Geometry I*. Springer-Verlag, 1987.
- [2] D. Pedoe, *Geometry. A Comprehensive Course*. Dover, 1988.
- [3] E. Roanes-Macías y E. Roanes-Lozano, Automatic determination of geometric loci. 3D-Extension of Simson-Steiner Theorem, en: John A. Campbell y Eugenio Roanes-Lozano (eds.), *Artificial Intelligence and Symbolic Computation. Procs. Intl. Conf. AISC 2000*. Springer-Verlag LNCS 1930, 2001 (157–173).
- [4] E. Roanes-Macías y E. Roanes-Lozano, Geometric determination of the spheres that are tangent to four given ones, en: P.M.A. Sloot, J.J. Dongarra, C.J.K. Tan, y A.G. Hoekstra (eds.), *Computational Science - ICCS 2002*. Springer-Verlag LNCS 2330, 2002 (52–61).
- [5] E. Roanes-Macías y E. Roanes-Lozano, A Completion of Hypotheses Method for 3D-Geometry. 3D-Extensions of Ceva and Menelaus Theorems, en: J. M. Díaz Báñez, A. Márquez y J.R. Portillo (eds.), *Proceedings of 20<sup>th</sup> European Workshop on Computational Geometry*. Universidad de Sevilla, 2004 (85–88).
- [6] E. Roanes-Macías y E. Roanes-Lozano, A method for outlining 3D-problems in order to study them mechanically. Application to prove the 3D-version of Desargues Theorem, en: L. González Vega y T. Tecio (eds.), *Proceedings of EACA 2004*. Univ. of Cantabria, 2004 (237–242).
- [7] E. Roanes-Macías y E. Roanes-Lozano, Aplicación de la transformación inversión 3D a construir cadenas de Steiner de esferas, en: F. Santos y D. Orden (eds.), *Actas de los XI Encuentros de Geometría Computacional*. Universidad de Cantabria, 2005 (141-148).
- [8] E. Roanes-Macías y E. Roanes-Lozano, A Maple Package for Automatic Theorem Proving and Discovery in 3D-Geometry, en: F. Botana y E. Roanes-Lozano (eds.), *Automated Deduction in Geometry. ADG 2006*. Universidade de Vigo, 2006 (125-140).
- [9] E. Roanes-Macías y E. Roanes-Lozano, 3D-extension of Steiner's chain problem. *Mathematical and Computer Modelling* 45 (2007) 137–148.