

Redes de triple lazo con muchos diagramas de mínima distancia*

Pilar Sabariego †

Francisco Santos ‡

Resumen

Un *diagrama de mínima distancia* (abreviadamente DMD) para un digrafo circulante de múltiple lazo es una herramienta muy utilizada para calcular el diámetro y la distancia media de un digrafo circulante. Los digrafos circulantes de doble lazo han sido muy estudiados y se sabe que cada uno tiene a lo más dos DMD's asociados, que tienen “forma de L”.

No obstante, en contra de lo que cabría esperar, nosotros en este trabajo demostramos que existen digrafos circulantes de triple lazo con un número arbitrario de DMD's asociados. Nuestros métodos se basan en las relaciones existentes entre DMD's e ideales monomiales, introducidos por Gómez y otros.

1 Introducción

Los digrafos circulantes fueron propuestos en 1974 por Wong y Coppersmith ([6]) para modelizar redes de área local, ya que algunas de sus propiedades se ven reflejadas en el digrafo. Los de doble lazo han sido ampliamente estudiados y existen múltiples resultados; sin embargo aún quedan muchos problemas por resolver en el caso general.

En particular, se sabe que los digrafos circulantes de doble lazo poseen a lo sumo dos *diagramas de mínima distancia* y que estos tienen forma de L (por lo cual se les llama “ L -formas”). Los DMD's son tablas multidimensionales que teselan el espacio y que nos dan el camino más corto entre cualesquiera dos nodos del digrafo circulante (ver Definición 2.2 para más detalles, y la Figura 1). En particular, a partir de un DMD podemos calcular fácilmente el diámetro o la distancia media del digrafo.

Los DMD's para los digrafos circulantes de triple lazo no tienen una forma tan sencilla como los DMD's de los digrafos circulantes de doble lazo, y esto hace que resulte más difícil estudiar las propiedades de estos digrafos circulantes de triple lazo (ver Figura 2). Por ejemplo, en [1] se propuso estudiar un tipo especial de teselas que recibieron el nombre de *hiper-L's* (ver Figura 3), pero en [3] se demostró que sólo algunos digrafos circulantes de triple lazo con unos parámetros particulares tienen asociado ese tipo de DMD's.

En este artículo, demostramos que existen digrafos circulantes de triple lazo con un número arbitrariamente grande de DMD's asociados. Para ello, reinterpretamos los DMD como (los conjuntos de monomios estándar de) ciertos ideales monomiales asociados al digrafo circulante (continuando con los métodos de [4]).

2 Digrafos circulantes y DMD's

Definición 2.1. Un digrafo circulante con N nodos y pasos s_1, \dots, s_r es un grafo dirigido cuyos nodos son $0, 1, \dots, N-1$ y cuyas rN aristas son:

$$i \rightarrow i + s_j \pmod{N},$$

*Trabajo parcialmente financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia, MTM2005-08618-C02-02.

†Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación. Universidad de Cantabria. pilar.sabariego@unican.es

‡Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación. Universidad de Cantabria. francisco.santos@unican.es

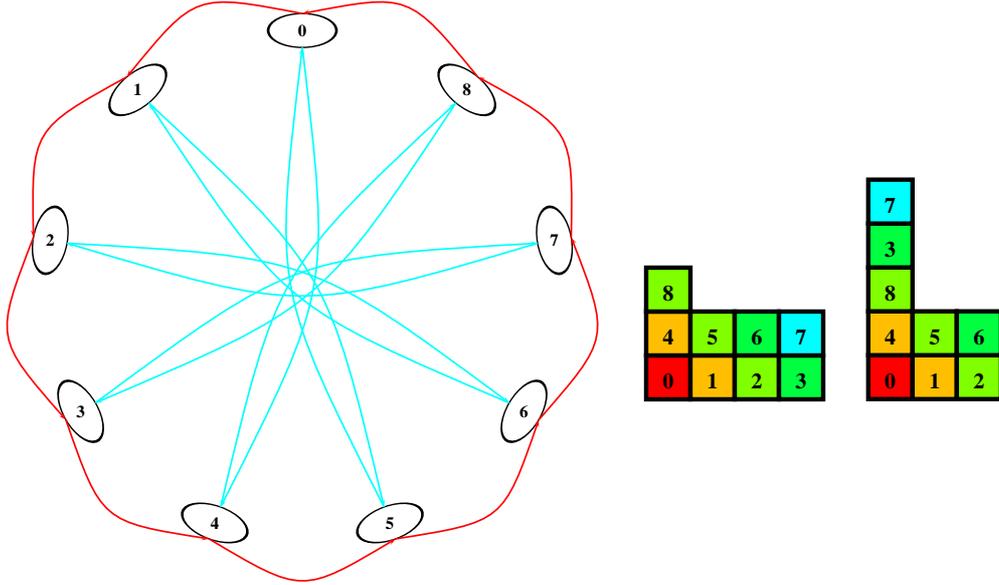


Figure 1: Digrafo circulante $C_9(1, 4)$ y sus dos DMD's asociados.

para todo $i = 0, 1, \dots, N - 1$ y $j = 0, 1, \dots, r$.

Lo denotamos $C_N(s_1, \dots, s_r)$ y es “doble” si $r = 2$ y “triple” si $r = 3$.

Con otras palabras, $C_N(s_1, \dots, s_r)$ es un digrafo de Cayley del grupo cíclico \mathbb{Z}_N con respecto a $\{s_1, \dots, s_r\}$. Es evidente que $C_N(s_1, \dots, s_r)$ es vértice-transitivo y de grado r . Además es conexo si y sólo si $\text{mcd}(N, s_1, \dots, s_r) = 1$, cosa que supondremos a partir de ahora para todos los digrafos circulantes. Las Figuras 1 y 2 muestran los digrafos circulantes $C_9(1, 4)$ y $C_{25}(1, 3, 7)$, con 2 y 3 lazos respectivamente.

Definición 2.2. Un *diagrama de mínima distancia* (DMD) de $C_N(s_1, \dots, s_r)$ es una aplicación $D : \mathbb{Z}_N \longrightarrow \mathbb{N}^r$ tal que¹:

- Para todo $i \in \mathbb{Z}_N$, $\|D(i)\|_1 = \min\{\|\mathbf{a}\|_1 : \mathbf{a} \in \mathbb{N}^r, i = a_1s_1 + \dots + a_rs_r\}$.
- Para todo $i \in \mathbb{Z}_N$ y para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^r$ que sea menor que $D(i)$ coordenada a coordenada, se tiene que $\mathbf{b} = D(j)$ para algún j (con $j = b_1s_1 + \dots + b_rs_r$).

Un DMD nos da, en particular, una manera de encontrar un camino mínimo para cada pareja de vértices i y j . En primer lugar, por transitividad del grafo, no hay pérdida de generalidad en suponer que $i = 0$. En segundo lugar, para ir de 0 a j basta con buscar $D(j)$ en el DMD y hacer tantos pasos de cada tipo s_l como sea la coordenada l -ésima de $D(j)$. El orden en que se den los pasos es irrelevante.

Con esta interpretación, la segunda condición de la definición de DMD es equivalente a que si el camino mínimo de i a j que da el DMD pasa por k , se verifica que los dos subcaminos inducidos, de i a k y de k a j , son también caminos mínimos dados por el DMD. Esta condición está implícita en la mayoría de los trabajos sobre DMD's.

Por ejemplo, la Figura 4 muestra dos DMD's de $C_6(1, 2, 3)$. En cada dibujo los “cubos” que se usan (aunque sólo vemos cinco, son seis) representan la imagen de la aplicación D , cada una etiquetada con el $i \in \{0, \dots, 5\}$ del que proviene. Estos dos DMD's se diferencian en la elección del camino más corto desde el 0 al 4.

Para entender aún más el concepto de DMD, pensemos en el grafo $C_8(1, 2, 3)$ y que los dos dibujos de la Figura 4 son DMD's parciales, en los que nos falta por decidir los caminos al vértice 6 y al 7.

¹Como es habitual en este contexto, para nosotros \mathbb{N} incluye el 0.

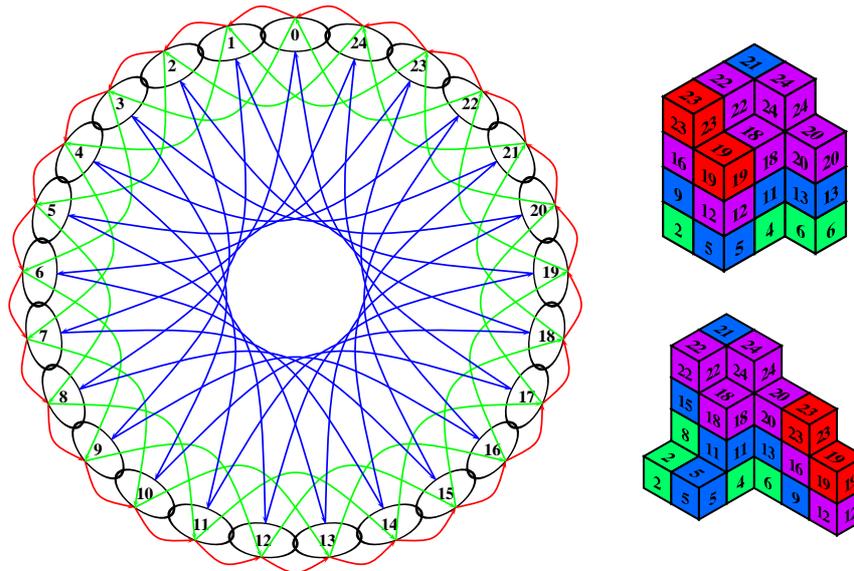


Figure 2: Digrafo circular $C_{25}(1, 3, 7)$ y dos de sus DMD's asociados.

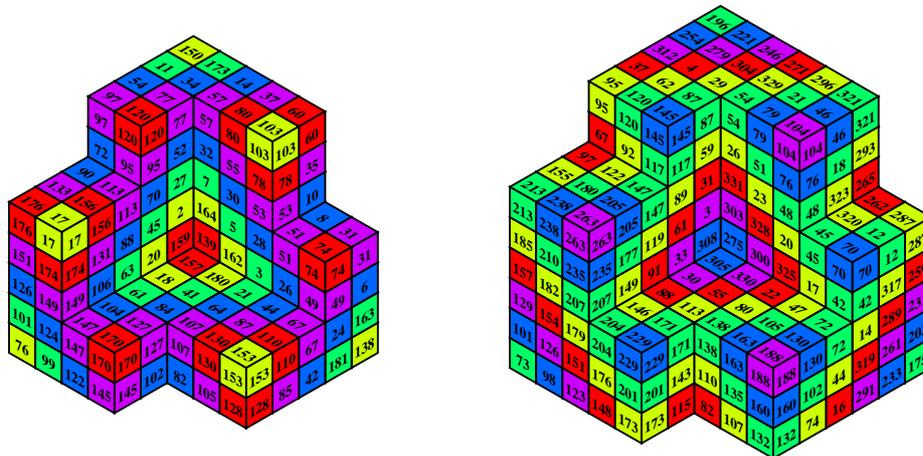


Figure 3: Dos hyper-L's correspondientes a los digrafos $C_{182}(43, 23, 25)$ y $C_{333}(58, 25, 28)$

Para completar los DMD's, necesitamos añadir la celda $(0, 0, 2)$ etiquetada con "6" y cualquiera de las celdas $(1, 0, 2)$ o $(0, 2, 1)$, etiquetadas ambas con "7" ($1 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3 = 7$). Pero sólo una de las posibles elecciones para la celda etiquetada con "7" es compatible con cada una de las elecciones de la celda etiquetada con "4".

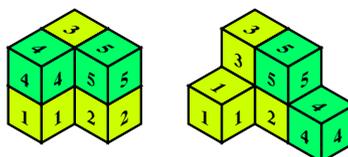


Figure 4: Dos DMD's para $C_6(1, 2, 3)$.

Lema 2.3 (Aguiló y Mirallés '04). *Todo digrafo circular de doble lazo tiene a lo sumo dos DMD's.*

3 DMD's e ideales monomiales

En esta sección recordamos algunos resultados que aparecen en [4], y terminamos con un resultado propio (Teorema 3.3) que caracteriza de un modo más simple el ideal binomial asociado a un digrafo circulante.

Sea \mathbb{K} un cuerpo arbitrario y $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$ el anillo de polinomios en las variables x_1, \dots, x_r . Identificamos los monomios de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$ con los vectores de \mathbb{N}^r del siguiente modo:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \longleftrightarrow \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r).$$

Un ideal monomial es un ideal generado por monomios. Puede entenderse como un conjunto I de monomios (i.e., un subconjunto de \mathbb{N}^r) con la propiedad de que $v \in I \Rightarrow v + w \in I, \forall w \in \mathbb{N}^r$. Equivalentemente, $I \subset \mathbb{N}^r$ es un ideal si su complementario (llamado el *conjunto de monomios estándar*) satisface $v + w \notin I \Rightarrow v, w \notin I$.

Un *orden monomial* es un orden total en \mathbb{N}^r que es invariante para la suma y en el cual 0 es el único mínimo. Decimos que un orden monomial es *graduado* si extiende al orden (parcial) dado por la norma L_1 (o grado total) de los monomios.

Observación 3.1. Todo orden monomial graduado \prec induce un DMD:

$$\begin{aligned} D_{\prec} : \mathbb{Z}_N &\longrightarrow \mathbb{N}^r \\ c &\longmapsto \min_{\prec} \{ \mathbf{a} \in \mathbb{N}^r : c = a_1 s_1 + \cdots + a_r s_r \} \end{aligned}$$

Dado un ideal (no monomial $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$) y un orden monomial (graduado o no) \prec es bien sabido que los monomios directores de los polinomios de I forman un ideal monomial, al que se llama *ideal inicial de I con respecto al orden \prec* . El cálculo de un ideal inicial es equivalente al de una base de Gröbner.

El resultado principal de [4] respecto a esto, afirma que una manera de obtener DMD's es como ideales iniciales del ideal I asociado a un cierto retículo. Recordemos que un retículo entero es un subgrupo aditivo de \mathbb{Z}^r y que a todo retículo entero $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^r$ se le asocia el ideal binomial:

$$I_{\mathcal{L}} := \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{a}^-} : \mathbf{a} \in \mathcal{L} \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r],$$

donde $\mathbf{a} = \mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-$ es la única descomposición de \mathbf{a} con $\mathbf{a}^+, \mathbf{a}^- \in \mathbb{N}^r$. Además (ver [5]):

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in I_{\mathcal{L}} \iff \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathcal{L}.$$

Teorema 3.2 (Gómez-Pérez et al.'06 [4]). Sean $N, s_1, \dots, s_r \in \mathcal{N}$. Consideremos el retículo $\mathcal{L} := \{ (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{Z}^r : x_1 s_1 + \cdots + x_r s_r \equiv 0 \pmod{N} \}$ y su ideal binomial I .

Entonces, todos los ideales iniciales de I con respecto a órdenes graduados son DMD's del digrafo $C_N(s_1, \dots, s_r)$.

Al ideal I del enunciado lo llamaremos el *ideal binomial asociado al grafo circulante $C_N(s_1, \dots, s_r)$* .

Hay que notar que el recíproco de este teorema no es cierto en general². Por ejemplo, en el grafo circulante $C_8(1, 3, 5, 7)$ el conjunto de monomios $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^2, x_2^2, x_3 x_4\}$ "es" un DMD pero no es el (complementario de) ningún ideal inicial de I .

Uno de los resultados de [4] es una representación de I como ideal generado por $r + 2$ polinomios, donde el cálculo de dichos polinomios involucra el encontrar enteros β y α_i tales que:

$$1 = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_r s_r + \beta N.$$

Nuestro resultado en este sentido es la siguiente descripción alternativa del mismo ideal:

²Aunque sí en el caso de doble lazo, por el Lema 2.3, y no conocemos ningún contraejemplo con triple lazo.

Teorema 3.3. *El ideal binomial asociado al grafo circulante $C_N(s_1, \dots, s_r)$ es igual al que resulta de eliminar la variable t del siguiente ideal binomial:*

$$\tilde{I} := \langle t^N - 1, t^{s_1} - x_1, \dots, t^{s_r} - x_r \rangle.$$

Obsérvese que el ideal \tilde{I} también es el ideal de un retículo, a saber de

$$\tilde{\mathcal{L}} := \langle Ne_t, s_1e_t - e_1, \dots, s_re_t - e_r \rangle.$$

La diferencia es que en este caso los generadores del retículo se traducen directamente a generadores del ideal, mientras que en el caso general el ideal necesita más generadores que el retículo.

4 Muchos DMD's

Consideremos el digrafo circulante $C_N(s_1, s_2, s_3)$. Su retículo asociado es:

$$\mathcal{L} := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : s_1x + s_2y + s_3z \equiv 0 \pmod{N}\}.$$

Las distintas elecciones que hacemos para construir un DMD se corresponden con los diferentes vectores (camino en el digrafo) que son distintos pero que tienen los mismos nodos de salida y de llegada y la misma longitud, i. e.: $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^r$ tales que $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{L}$ y $\|\mathbf{a}\|_1 = \|\mathbf{b}\|_1$. Dicho de otro modo, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ está en el siguiente retículo, al que llamaremos *subretículo homogéneo* de \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}_0 := \mathcal{L} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Por ejemplo, en la Figura 4 el retículo asociado al grafo circulante $C_6(1, 2, 3)$ sería

$$\mathcal{L} := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : x + 2y + 3z \equiv 0 \pmod{6}\}$$

y su subretículo homogéneo \mathcal{L}_0 está generado por los vectores $(1, -2, 1)$ y (por ejemplo) $(3, 0, -3)$. El segundo vector es irrelevante en este ejemplo, pero el primero es la causa de la existencia de dos DMD's.

Expongamos y demostremos ahora nuestro resultado principal:

Teorema 4.1. *Sean a y $q \in \mathbb{N}$. Sea $N = 1 + q + q^2$ y sea $k \geq N$. Supongamos que $\text{mcd}(a, k) = 1$, $\text{mcd}(k, N) = 1$ y $\text{mcd}(q - 1, N) = 1$. Entonces, $C_{Nk}(a + k, a + qk, a + q^2k)$ tiene al menos $\mathbf{3}(\mathbf{q} + \mathbf{2})$ DMD's.*

Demostración. Tenemos que probar que hay $\mathbf{3}(\mathbf{q} + \mathbf{2})$ ideales iniciales diferentes para el retículo \mathcal{L} . Para simplificar, haremos la demostración para $a = 1$ y $q = 5$. Por tanto, hay que probar que existen $\mathbf{3} \times \mathbf{7} = \mathbf{21}$ ideales iniciales diferentes para el retículo \mathcal{L} , que en este caso es:

$$\mathcal{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : (1 + k)x + (1 + 5k)y + (1 + 25k)z \equiv 0 \pmod{31k}\},$$

\mathcal{L} junto con $x + y + z = 0$, nos da el retículo homogéneo, que al simplificar queda como:

$$\mathcal{L}_0 = \begin{cases} y + 6z \equiv 0 \pmod{31} \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Consideremos el octante con signos $(-, +, +)$ intersecado con \mathcal{L}_0 . El resultado es un semigrupo generado por los vectores $(-31, 0, 31)$, $(-6, 1, 5)$, $(-11, 7, 4)$, $(-16, 13, 3)$, $(-21, 19, 2)$, $(-26, 25, 1)$ y $(-31, 31, 0)$ (en general, obtenemos $q + 2$ generadores). (Ver Figura 5)

Para cada b_i en el sistema minimal de generadores, el vector normal exterior a \vec{Ob}_i nos da un rayo que separa dos regiones en el abanico de DMD's (también llamado abanico de Gröbner), ya que si $b_i = b_i^+ - b_i^-$, con $b_i^+ = \max\{b_{i_j}, 0\}$ y $b_i^- = \max\{-b_{i_j}, 0\}$, entonces:

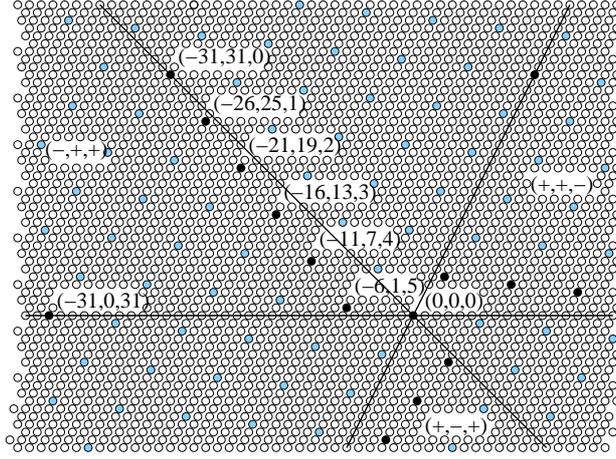


Figure 5: Retículo \mathcal{L}_0 de $C_{31k}(1+k, 1+5k, 1+25k)$

- El vector normal exterior da igual peso a los monomios $x^{b_i^+}$ y $x^{b_i^-}$, que están en la misma órbita módulo \mathcal{L} (representan el mismo monomio del ideal).
- Como el grado de $x^{b_i^+}$ y $x^{b_i^-}$ es menor que $31 < k$ y como \mathcal{L} contiene sólo vectores cuyas coordenadas suman un número múltiplo de k no hay monomios de grado menor equivalentes a ellos módulo \mathcal{L} .
- Entre los monomios equivalentes a $x^{b_i^+}$ y $x^{b_i^-}$ y con el mismo grado, el vector normal exterior da menos peso a estos que a cualquier otro, ya que $O\vec{b}_i$ es un segmento de la envolvente convexa de los puntos equivalentes a b_i^+ y b_i^- módulo \mathcal{L} que están en el octante intersecado con el plano $x+y+z=0$.

Así $x^{b_i^+}$ y $x^{b_i^-}$ son dos monomios del ideal inicial obtenidos modificando el orden monomial graduado con un vector obtenido a través de una perturbación del vector normal exterior hacia un lado u otro, respectivamente. (Ver Figura 6).

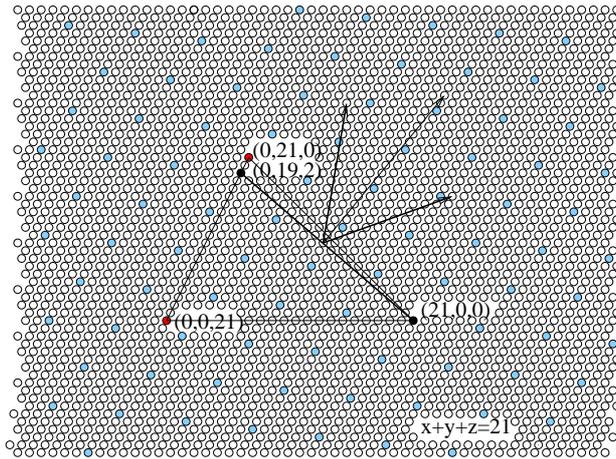


Figure 6: Perturbación del vector normal exterior.

Repetiendo el mismo razonamiento sobre los octantes con signos $(+, -, +)$ y $(+, +, -)$, el número de DMD's será la suma del número de elementos en los tres sistemas minimales degeneradores.

Por tanto, $C_{31k}(1+k, 1+5k, 1+25k)$ tiene $21 = 3 \times 7$ DMD's. \square

El concepto clave usado en la demostración son los sistemas de generadores de los semigrupos obtenidos intersecando \mathcal{L}_0 con los diferentes octantes. Recordemos que el (único) sistema minimal de

generadores de un semigrupo se llama su *base de Hilbert*. A primera vista, de la demostración anterior parece deducirse que el número de DMD's obtenido coincide con el número de elementos de las bases de Hilbert de los semigrupos intersección de \mathcal{L}_0 con los tres octantes. Tenemos razones para pensar que eso no es cierto en general, pero sí que lo es para digrafos circulantes de triple lazo siempre que los tres pasos s_1 , s_2 y s_3 sean distintos (lo cual sucede en todos los ejemplos prácticos pues si no el digrafo tiene aristas repetidas).

Referencias

- [1] F. Aguiló, M.A. Fiol, C. García, Triple-loop networks with small transmission delay. *Discrete Math.* **167/168** (1997) 3–16.
- [2] F. Aguiló, A. Mirallés, POMDIG: Construcción de L-formas implementables. IV Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica. Universidad Politécnica de Madrid (2004) 109–116.
- [3] C. Chen, F.K. Hwang, J.S. Lee, S.J. Shih, The existence of hyper-L triple-loop networks. *Discrete Math.* **268** (2003) 287–291.
- [4] D. Gómez, J. Gutierrez, A. Ibeas, Cayley Digraphs of Finite Cyclic Groups and Monomial Ideals *Preprint*. University of Cantabria (2006).
- [5] B. Sturmfels, R. Weismantel and G. M. Ziegler, Gröbner Bases of Lattices, Corner Polyhedra, and Integer Programming *Contribution to Algebra and Geometry*. **Vol. 36** (1995), No 2, 281–298.
- [6] C.K. Wong, D. Coppersmith, A combinatorial problem related to multimodule organizations. *J. Assoc. Comput. Mach.* **21** (1974) 392–402.