

# Optimización de rutas de evacuación \*

Manuel Abellanas †

Gregorio Hernández ‡

## Resumen

En este trabajo se resuelven varios problemas de optimización geométrica relacionados con el diseño de rutas que se desea que estén próximas a un conjunto de puntos del plano. Se resuelve el problema básico de encontrar una ruta de desviación mínima y varios problemas de optimización multicriterio, en los que además de buscar rutas de desviación mínima, se busca satisfacer otros requisitos: longitud mínima, desviación mínima en cada punto, unimodalidad de la desviación o giro total mínimo.

## 1 Introducción

En el traslado en ambulancia de una localidad a otra de un enfermo que requiere atención especial, es conveniente elegir una ruta en la que haya cerca un hospital en todo momento <sup>1</sup>. Una ruta que cumpla este requisito diremos que es una *ruta segura*. En este trabajo presentamos varios problemas de optimización geométrica relacionados con el diseño de rutas seguras. Supongamos que existen  $n$  puntos en el plano que calificaremos de *seguros*. Si tenemos que desplazarnos de un punto seguro  $A$  a otro  $B$ , estamos interesados en que el camino por el que nos desplazamos se aleje lo menos posible del conjunto de puntos seguros  $S$ . Definiremos la desviación de un camino respecto a un conjunto de puntos  $S$  y la desviación mínima asociada a un par de puntos  $A$  y  $B$  de  $S$ . Veremos que existen muchos caminos de desviación mínima y cómo encontrar alguno. Entre los caminos de desviación mínima, tiene interés buscar aquellos que optimicen alguna otra condición. En la sección 3 consideramos varios casos. Entre ellos, el camino de desviación mínima de mínima longitud, que es el camino más corto que no se desvía más de lo necesario de  $S$ , o el camino de mínima desviación en cada punto, que es el más seguro en todo momento. Estos problemas son, por tanto, de optimización *multicriterio*. En general estos problemas son difíciles, pues incluso con sólo dos criterios a optimizar ya hay muchos NP-completos. Por ejemplo, Arkin et al. demuestran en [1] que encontrar un camino de longitud mínima en un entorno poligonal respecto de dos métricas distintas  $L_p$  y  $L_q$  es NP-duro. En [8] se pueden encontrar más problemas geométricos multicriterio.

La planificación de rutas es uno de los problemas más estudiados en el área de *Localización de servicios (Facility location)*. Usualmente se plantean casos discretos en los que el espacio de trabajo se reduce a un grafo finito, pero también hay resultados en el caso continuo. Por ejemplo, las rutas de minimización de riesgo para el transporte de mercancías peligrosas, (Díaz et al. [2] y Erkurt y Verter [3]), en las que se desea maximizar la mínima distancia de los puntos del camino a los puntos de un conjunto  $S$  (lugares habitados o puntos de demanda). Otro problema estudiado es el *Maximum Concealment Path* (Gewali et al. [7]) en el que se buscan rutas en un entorno poligonal del plano que minimicen la longitud de los tramos del camino que son visibles desde los puntos de un conjunto  $S$  de "enemigos".

Dado un conjunto de puntos  $S$  en el plano, los lugares "seguros", y un par de puntos  $A$  y  $B$  de  $S$ , queremos obtener un camino entre  $A$  y  $B$  que no se aleje demasiado de los puntos de  $S$ . Precisamos a continuación esta noción de cercanía.

---

\*Parcialmente subvencionado por CAM P-DPI-000235-0505 (Gatarvisa).

†Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid, [mabellanas@fi.upm.es](mailto:mabellanas@fi.upm.es)

‡Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid, [gregorio@fi.upm.es](mailto:gregorio@fi.upm.es)

<sup>1</sup>Se dan casos. Dedicado a Belén Palop y Manuel Aguilar

**Definición 1.1.** Llamamos desviación de un punto  $z$  del plano con relación a  $S$  a la mínima distancia de  $z$  a los puntos de  $S$ .

$$dev(z, S) = \min\{dist(z, x)/x \in S\}$$

**Definición 1.2.** Si  $P$  es un camino que conecta los puntos  $A$  y  $B$ , (arco de curva de extremos  $A$  y  $B$ ), llamamos desviación de  $P$  con respecto a  $S$  a la máxima desviación de los puntos del camino, es decir,

$$dev(P, S) = \max\{dev(z, S)/z \in P\}$$

**Definición 1.3.** Se llama desviación del par  $(A, B)$  con respecto a  $S$  a la mínima de las desviaciones de todos los caminos de  $A$  hasta  $B$

$$dev(A, B, S) = \min\{dev(P, S)/P \text{ camino de } A \text{ hasta } B\}$$

**Definición 1.4.** Un camino  $P$  entre  $A$  y  $B$  se dice que es de *desviación mínima* con respecto a  $S$  si  $dev(P, S) = dev(A, B, S)$ .

Dicho de otra forma, si la desviación del par  $(A, B)$  respecto de  $S$  es  $r$ , un camino  $P$  entre  $A$  y  $B$  es de desviación mínima si para cualquier punto  $z \in P$  se cumple que  $dist(z, S) \leq r$ .

En todo el trabajo consideramos que  $S$  es un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general, lo que significa que no hay tres puntos alineados ni cuatro cocirculares y que no hay pares de puntos a la misma distancia.

El resto del trabajo se organiza del siguiente modo. En la sección 2 se calcula la desviación de un camino poligonal respecto a un conjunto  $S$  y la desviación mínima entre pares de puntos de  $S$ . La sección 3 estudia algunos problemas de optimización entre dichos caminos de desviación mínima. La sección 4 analiza los cambios que se producen en los resultados obtenidos cuando los extremos de los caminos no son puntos seguros.

## 2 Desviación de un camino. Arista crítica

Dado un conjunto de puntos  $S$ , resolvemos en esta sección dos problemas: (1) dado un camino poligonal  $P$ , hallar su desviación con respecto a  $S$ , y (2) calcular la desviación del par  $(A, B)$  con respecto a  $S$  para todo par de puntos de  $S$ .

**Proposición 2.1.** *Dados un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en el plano y  $P$  un camino poligonal formado por  $k$  segmentos, la desviación de  $P$  con respecto a  $S$  se calcula en tiempo  $O(n \log n + nk)$ .*

*Demostración.* La desviación de un segmento se puede calcular en tiempo  $O(n)$ , una vez construido el Diagrama de Voronoi de  $S$ , pues la desviación es la distancia de  $S$  a uno de los extremos del segmento o a uno de sus puntos de intersección con una arista del diagrama de Voronoi. Por tanto, la desviación de una poligonal de  $k$  segmentos se calcula en  $O(n \log n + nk)$ .  $\square$

La desviación mínima de todos los caminos entre  $A$  y  $B$ , puntos de  $S$ , depende de la longitud de una arista del árbol generador mínimo euclídeo del conjunto  $S$  ( $EMST(S)$ ).

**Definición 2.2.** Se llama *arista crítica* del par  $(A, B)$  con respecto a  $S$  a la arista de mayor longitud en el único camino que conecta  $A$  y  $B$  en  $EMST(S)$ . El punto medio de esta arista se llama punto crítico de  $(A, B)$  con respecto a  $S$

**Proposición 2.3.** *Si  $e$  es la arista crítica del par  $(A, B)$  con respecto al conjunto  $S$  de puntos del plano entonces la desviación de  $(A, B)$  con respecto a  $S$  es*

$$dev(A, B, S) = \frac{1}{2} \text{long}(e)$$

*Demostración.* Probaremos que todo camino de  $A$  a  $B$  con desviación mínima debe pasar por  $M$ , el punto medio de la arista crítica  $e$ .

Se construyen los discos con centro en cada punto de  $S$  y radio  $r = \frac{1}{2} \text{long}(e)$ . La unión de estos discos,  $\mathcal{C}$ , tiene al punto  $M$  en su frontera. El interior de  $\mathcal{C}$  tiene dos componentes conexas, una conteniendo a  $A$  y otra conteniendo a  $B$ , teniendo ambas al punto  $M$  en su borde. Así cualquier camino de  $A$  hasta  $B$  contenido en  $\mathcal{C}$  tiene desviación  $r$  y pasa por  $M$ .

Además todo camino no contenido en  $\mathcal{C}$  tiene algún punto con desviación mayor que  $r$ , por lo que  $r$  es  $\text{dev}(A, B, S)$  como queríamos demostrar. □

Así tenemos la respuesta al problema (2) para un par de puntos.

**Proposición 2.4.** *La desviación del par  $(A, B)$  con respecto al conjunto  $S$  de  $n$  puntos del plano se puede calcular en  $O(n \log n)$ .*

*Demostración.* El árbol generador mínimo,  $EMST(S)$ , se construye en tiempo lineal a partir de la triangulación de Delaunay de  $S$ . La arista de mayor longitud de  $EMST(S)$  entre  $A$  y  $B$  se halla en tiempo lineal. Por tanto el tiempo total es  $O(n \log n)$ . □

Ahora respondemos a la pregunta (2) para todos los pares de puntos de  $S$ .

**Teorema 2.5.** *La desviación de todos los pares de puntos de  $S$  con respecto a  $S$  se puede calcular en tiempo  $O(n^2)$  y espacio  $O(n^2)$ .*

*Demostración.* Una vez calculado el árbol  $EMST(S)$ , para un punto  $A$  de  $S$  podemos calcular la desviación de todos los pares  $(A, X)$  con  $X \in S$  en tiempo  $O(n)$  mediante una búsqueda en el árbol. Este proceso hay que repetirlo para cada uno de los puntos de  $S$ . Por tanto, la complejidad es  $O(n^2)$  en tiempo y espacio. □

### 3 Optimización multicriterio

Dentro del conjunto de caminos de desviación mínima entre  $A$  y  $B$  busquemos ahora el que sea óptimo según otro criterio. Estudiaremos los siguientes criterios: longitud mínima, mínima desviación en cada punto, desviación unimodal y giro total mínimo.

#### 3.1 Camino de desviación y longitud mínimas

En la sección anterior hemos visto que todos los caminos de desviación mínima están contenidos en la región  $\mathcal{C}$  unión de los discos centrados en  $S$  y de radio  $r$ , la desviación mínima. Por tanto el camino de desviación y longitud mínimas será el camino mínimo entre  $A$  y  $B$  dentro de la región  $\mathcal{C}$ .

Esta región  $\mathcal{C}$  se puede poligonizar eliminando los segmentos circulares determinados por puntos de intersección de discos que sean consecutivos en el borde de  $\mathcal{C}$ , pues el camino de longitud mínima nunca penetra en esos segmentos circulares, a excepción del caso en que el centro del disco correspondiente esté contenido en uno de dichos segmentos circulares. En ese caso el triángulo cuyos vértices son los dos puntos de intersección consecutivos y el centro del disco se mantiene formando parte del polígono eliminando el resto del segmento circular (ver figura 1).

Llamemos  $\mathcal{P}$  a la región poligonal así construida, unión de dos polígonos con un vértice común, el punto crítico  $M$ . Como  $\mathcal{C}$  tiene a lo más  $6n - 12$  vértices (ver [6]), la región poligonal  $\mathcal{P}$  tiene  $O(n)$  vértices y, además, puede tener agujeros (una cantidad lineal de ellos) según se muestra en la figura 1.

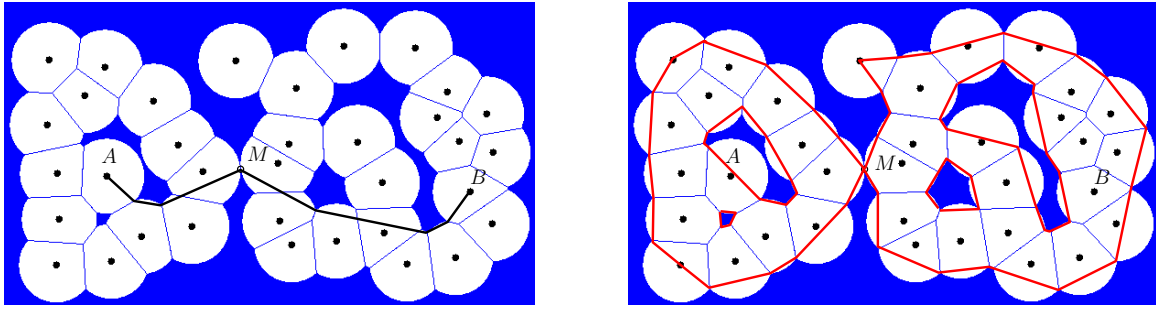


Figura 1: La región  $\mathcal{C}$  donde están contenidos todos los caminos de desviación mínima, el camino de longitud mínima y la región poligonal  $\mathcal{P}$ .

**Teorema 3.1.** *Dado un conjunto de puntos  $S$ , el camino de desviación y longitud mínimas entre los puntos  $A$  y  $B$  de  $S$  puede construirse en tiempo  $O(n \log n)$ .*

*Demostración.* En primer lugar se construye la región  $\mathcal{C}$ . Como es unión de  $n$  discos del mismo radio se puede realizar en  $O(n \log n)$ . La poligonización de  $\mathcal{C}$  para obtener  $\mathcal{P}$  se efectúa en tiempo lineal y la construcción del camino de longitud mínima en  $\mathcal{P}$  se puede efectuar en  $O(n \log n)$ , (Hershberger y Suri [4]), o en  $O(n + h^2 \log n)$ , (Kapoor et al. [5]), donde  $h$  es el número de agujeros. Como en este caso  $h \in O(n)$ , el problema se puede resolver en  $O(n \log n)$ .  $\square$

#### Observaciones

En la búsqueda del camino de longitud mínima debemos tener en cuenta que, de la región  $\mathcal{C}$ , no se pueden eliminar discos, según se muestra en la figura 2. A la izquierda se presenta un ejemplo en el que se comprueba que no basta considerar los discos centrados en los vértices del camino entre  $A$  y  $B$  en  $EMST(S)$ . Tampoco bastan los discos centrados en el camino mínimo entre  $A$  y  $B$  dentro del grafo de intersección de los discos de radio  $r$ , según se muestra en la figura de la derecha.

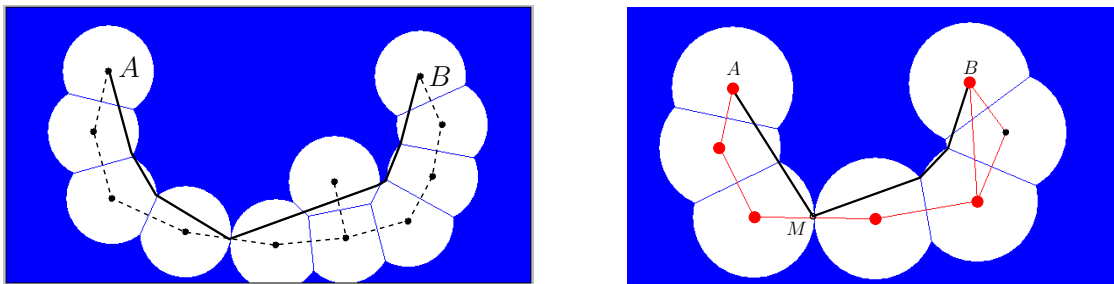


Figura 2: Los discos del camino en  $EMST(S)$  no son suficientes para construir  $\mathcal{C}$ . Tampoco bastan (imagen derecha) los discos centrados en el camino mínimo entre  $A$  y  $B$  del grafo de intersección de los discos de radio  $r$ .

### 3.2 Camino de mínima desviación en cada punto

El problema ahora consiste en buscar el camino que minimice la desviación en cada uno de sus puntos.

Es fácil ver que en este caso el camino debe conectar los puntos  $A$  y  $B$  con una poligonal cuyos vértices sean puntos de  $S$  y tal que sus aristas tengan la menor longitud posible. La respuesta es el camino entre  $A$  y  $B$  del árbol generador mínimo euclídeo de  $S$ . (Ver figura 3) Así tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 3.2.** Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos del plano y dos puntos  $A$  y  $B$  de  $S$ , el camino de mínima desviación en cada punto entre  $A$  y  $B$  se calcula en tiempo  $O(n \log n)$ .

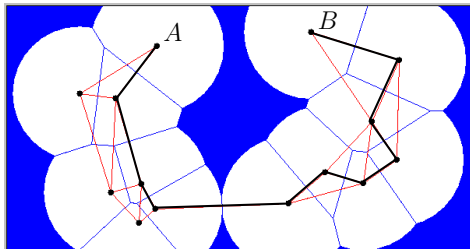


Figura 3: El camino de mínima desviación en cada punto está contenido en  $EMST(S)$

### 3.3 Caminos de desviación mínima unimodales

Consideremos el siguiente problema: Queremos desplazarnos de un punto  $A$  a otro punto  $B$  de un conjunto de puntos  $S$  del plano siguiendo un camino de desviación mínima de forma que la desviación de los puntos del camino no sufra oscilaciones. Es decir, durante una primera parte del camino la distancia a  $S$  del punto que lo recorre es monótona creciente hasta un punto, a partir del cual, y hasta llegar a  $B$ , la distancia a  $S$  es monótona decreciente.

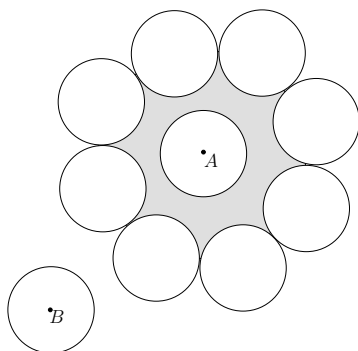


Figura 4: No existe un camino unimodal entre  $A$  y  $B$

El ejemplo de la figura 4 en el que el conjunto  $S$  tiene diez puntos, muestra que el problema no siempre tiene solución. En efecto, la frontera de la región sombreada equidista de  $S$  y en los puntos interiores de dicha región la distancia es mayor. Para llegar desde  $A$  hasta  $B$  hay que atravesar esa región y, por tanto, cualquier camino alcanzará un máximo local en ella. Un razonamiento análogo muestra que debe haber otro máximo local en la parte del camino que conecta el disco que rodea a  $B$  y uno de los discos que rodean a  $A$ .

En consecuencia, tiene sentido plantearse el problema del test de existencia del camino unimodal:

**Problema 3.3.** Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos del plano, sean  $A$  y  $B$  dos puntos de  $S$ . Determinar si existe un camino de extremos  $A$  y  $B$  de desviación mínima, tal que sea unimodal respecto de la desviación de  $S$ . En caso afirmativo, hallar uno de tales caminos.

Para resolver este problema consideremos para cada punto  $P$  del plano la región del plano  $S_P$  formada por todos los puntos a los que se puede llegar desde  $P$  por un camino monótono, es decir, tal que la distancia de sus puntos a  $S$  es una función monótona creciente. Es claro que si las regiones  $S_A$  y  $S_B$  tienen algún punto  $P$  en común, existe un camino unimodal de  $A$  a  $B$ , pues basta concatenar un camino monótono que una  $A$  y  $P$  con el camino inverso de cualquier camino monótono que una  $B$  y  $P$ . Por otra parte, si tal camino existe, el punto crítico del par  $(A, B)$  será uno de los puntos de la intersección de  $S_A$  y  $S_B$ . Consideremos, por tanto, el siguiente problema:

**Problema 3.4.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos del plano y  $A$  un punto de  $S$ . Hallar el lugar geométrico,  $S_A$ , de los puntos del plano conectados con  $A$  por un camino monótono respecto de la distancia a  $S$  (Ver figura 5).

**Lema 3.5.** Si  $A \in S$ , todos los puntos de la región de Voronoi de  $A$  pertenecen a  $S_A$ .

**Lema 3.6.** Si un punto  $P$  pertenece a  $S_A$  y a la región de Voronoi del punto  $Q \in S$ , entonces el segmento contenido en la semirrecta  $\overrightarrow{QP}$  con un extremo en  $P$  y otro en la frontera de la región de Voronoi de  $Q$ , está contenido en  $S_A$ .

**Lema 3.7.** Si un punto  $P$  pertenece a  $S_A$  y a la región de Voronoi del punto  $Q \in S$ , entonces el arco de circunferencia que contiene a  $P$  y se obtiene al cortar la circunferencia centrada en  $Q$  que pasa por  $P$  con la región de Voronoi de  $Q$ , está contenido en  $S_A$ .

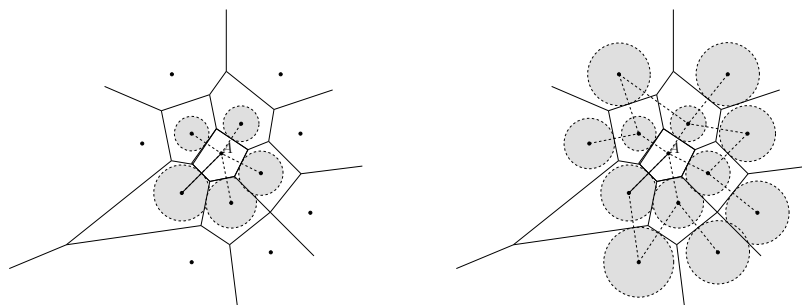


Figura 5: La región de Voronoi de  $A$  es accesible. Los puntos de sus regiones vecinas que no están en los círculos grises también. En la imagen derecha, los puntos no contenidos en los círculos grises forman la región  $S_A$ .

**Lema 3.8.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos del plano y  $A$  un punto de  $S$ . La intersección de la región  $S_A$  con la región de Voronoi de un punto  $Q$  de  $S$  puede ser de tres tipos:

- Si el punto considerado es  $A$ , la intersección coincide con la región de Voronoi.
- Vacía.
- Formada por una o varias componentes conexas, cada una de las cuales tiene como frontera un arco de circunferencia centrada en  $Q$  y una cadena poligonal que forma parte de la frontera de la región de Voronoi de  $Q$  (ver Figura 5).

**Teorema 3.9.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos del plano y  $A$  un punto de  $S$ . La región  $S_A$  formada por los puntos del plano a los que se llega desde el punto  $A$  por un camino cuya distancia a  $S$  es monótona creciente, se puede obtener en tiempo  $O(n \log n)$  y espacio lineal.

*Demostración.* El algoritmo consta de dos pasos:

1. Hallar el diagrama de Voronoi de  $S$ .
2. A partir de la región de Voronoi del punto  $A$  hacer un recorrido en anchura del diagrama de Voronoi expandiendo la región  $S_A$  en las regiones visitadas.

Los lemas previos garantizan que el algoritmo obtiene la región  $S_A$ . La complejidad del primer paso es  $O(n \log n)$  y la del segundo es lineal.  $\square$

### 3.4 Camino de desviación y giro total mínimos

El objetivo es ahora minimizar el giro total del camino, es decir, la suma de los valores absolutos de los cambios en la orientación de los segmentos que forman el camino. Un camino de giro total mínimo utiliza sólo aristas del grafo de visibilidad de la región considerada, por lo que podemos, como en el caso de longitud mínima, poligonizar la región  $\mathcal{C}$  y utilizar el resultado de [1] para obtener el camino de desviación y giro total mínimos en  $O(E \log n)$  donde  $E$  es el tamaño del grafo de visibilidad de la región poligonizada  $\mathcal{P}$ .

## 4 Rutas seguras entre puntos no seguros

Estudiaremos en esta sección cómo se modifican los resultados anteriores cuando se consideran caminos entre dos puntos  $A$  y  $B$  que no pertenecen al conjunto  $S$  de puntos seguros. La diferencia fundamental es que ahora no todos los caminos de desviación mínima pasan por un mismo punto, es decir, no existe un punto crítico para el par  $(A, B)$ .

Llamamos  $A_S$  y  $B_S$  a los puntos del conjunto  $S$  más próximos a los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Ahora la *arista crítica* del par  $(A, B)$  con respecto a  $S$  es la arista de mayor longitud en el único camino que conecta  $A_S$  y  $B_S$  en  $EMST(S)$ .

**Proposición 4.1.** *Si  $e$  es la arista crítica del par  $(A, B)$  con respecto al conjunto  $S$  de puntos del plano entonces la desviación de  $(A, B)$  con respecto a  $S$  es*

$$dev(A, B, S) = \max\left\{\frac{1}{2}long(e), dist(A, A_S), dist(B, B_S)\right\}$$

*Demostración.* Si  $A_S$  y  $B_S$  coinciden, la arista crítica se reduce al punto  $A_S$ , la desviación mínima es  $m = \max\{dist(A, A_S), dist(B, A_S)\}$  y todos los caminos con desviación mínima están contenidos en el disco de centro  $A_S$  y radio  $m$ . Si  $A_S \neq B_S$ , la desviación de cualquier camino que va desde  $A$  hasta  $B$  debe ser al menos  $m = \max\{dist(A, A_S), dist(B, A_S)\}$  pues  $A_S$  es el punto de  $S$  más próximo al punto  $A$  y  $B_S$  es el punto de  $S$  más próximo al punto  $B$ . Si  $r = \max\{m, \frac{1}{2}long(e)\}$ , entonces el camino que se obtiene concatenando las aristas  $\overline{AA_S}$  y  $\overline{BB_S}$  al único camino que conecta  $A_S$  y  $B_S$  en  $EMST(S)$  tiene desviación  $r$ . Todos los caminos entre  $A$  y  $B$  contenidos en la región  $\mathcal{C}$ , unión de los discos de radio  $r$  centrados en los puntos de  $S$ , tendrán también desviación  $r$ . Además todo camino no contenido en  $\mathcal{C}$  tiene algún punto con desviación mayor que  $r$ . Por tanto,  $r$  es la desviación del par  $(A, B)$  con respecto a  $S$ . Sólo cuando  $r = \frac{1}{2}long(e)$ , el interior de  $\mathcal{C}$  consta de dos componentes conexas cuyos bordes sólo tienen un punto común, el punto medio de la arista crítica de  $(A_S, B_S)$  y todos los caminos de desviación mínima pasan por él.

□

Una vez conocida la región que contiene todos los caminos de desviación mínima, analizamos los criterios de optimización descritos en la sección anterior.

En primer lugar analizamos los caminos de desviación mínima entre  $A$  y  $B$  en el caso en que  $A_S = B_S$ . Como se ha descrito en la sección anterior, todos están contenidos en un disco con centro  $A_S$ , que contiene a los dos puntos  $A$  y  $B$  y con uno de ellos (o los dos) en su borde. La respuesta a todos los criterios propuestos de optimización es siempre trivial. Los caminos que optimizan, de forma trivial, los diferentes criterios son o bien el segmento  $\overline{AB}$ , o bien la cadena poligonal  $\overline{AA_S, A_S B}$ .

Estudiemos ahora por separado los diferentes criterios de optimización en la situación general,  $A_S \neq B_S$ .

(1) Para calcular el camino de desviación y longitud mínimas sigue siendo válido el proceso descrito en el teorema 3.1, sin cambios en la complejidad  $O(n \log n)$ .

(2) El camino de mínima desviación en cada punto entre  $A$  y  $B$  es ahora la concatenación de las aristas  $\overline{AA_S}$  y  $\overline{BB_S}$  al único camino que conecta  $A_S$  y  $B_S$  en  $EMST(S)$ . Por tanto se puede construir en  $O(n \log n)$ .

(3) En la construcción de la región  $S_A$ , formada por los puntos accesibles desde  $A$  por un camino de desviación creciente, sólo hay que cambiar el lema 3.5. pues ahora no toda la región de Voronoi de  $A_S$  (punto de  $S$  más próximo a  $A$ ) es accesible. Si  $A$  no es punto de  $S$ , llamando  $D_A$  al disco de centro  $A_S$  que pasa por  $A$ , la zona de  $S_A$  en la región de Voronoi de  $A_S$  es la componente conexa de  $Vor(A_S) \cap (\mathbb{R}^2 - D_A)$  que contiene al punto  $A$ . La región  $S_A$  se sigue construyendo en tiempo  $O(n \log n)$ , como en el teorema 3.10, partiendo ahora de la zona accesible de la región de Voronoi de  $A_S$ .

(4) No hay modificaciones en cuanto al camino de giro total mínimo. Se construye en tiempo  $O(E \log n)$ .

## Referencias

- [1] E. M. Arkin, J. S. B. Mitchell, C. Piatko, *Bicriteria shortest path problems in the plane*, Proc. Third Canadian Conference on Computational Geometry, CCCG'91, pág. 153-156, 1991.
- [2] J. M. Díaz-Báñez, F. Gómez, G.T. Toussaint, *Computing Shortest Paths for Transportation of Hazardous Materials in Continuous Spaces*, Journal of Food Engineering, 30, pág. 293-298, 2005.
- [3] E. Erkut, V. Verter, *Hazardous materials logistics*. en Z. Drezner (Ed.), "Facility location: a survey of applications and methods", pág. 467-506. Springer-Verlag. 1995.
- [4] J. Hershberger, S. Suri, *On Computing Shortest Paths in the Plane*, Proc. 34th Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci., pág 508-517, 1993.
- [5] S. Kapoor, S. N. Maheshwari, J. S. B. Mitchell, *An Efficient Algorithm for Euclidean Shortest Paths Among Polygonal Obstacles in the Plane*, Discrete and Computational Geometry, 18, pág. 377-383 1997.
- [6] K. Kedem, J. Pach, M. Sharir, *On the union of Jordan regions and collision-free translational motion amidst polygonal obstacles*, Discrete and Computational Geometry, 1, pág. 59-71, 1986.
- [7] L. Gewali, A. Meng, J. S. B. Mitchell, S. Ntafos, *Path planning in  $0/1/\infty$  weighted regions with applications*, Proc. 4th Annual ACM SoCG, pág. 266-278, 1988.
- [8] J. S. B. Mitchell, *Shortest path and Networks*, en "Handbook on Computational Geometry", 2<sup>a</sup> ed. (J. Goodman, J. O'Rourke, ed.), pág. 607-641. CRC. 2004
- [9] J. S. B. Mitchell, G. Rote, G. Woeginger, *Minimum-Link Paths among Obstacles in the Plane*, Algorithmica, 8, pág. 431-459, 1992.