

# Árboles geométricos compatibles

A. García\*, C. Huemer†, F. Hurtado† y J. Tejel\*

## Resumen

Dado un árbol geométrico  $T$  trazado sin cortes sobre un conjunto de puntos en el plano, en esta comunicación se estudia la cantidad mínima de aristas que deben compartir  $T$  y otro árbol  $T'$  trazado sobre el mismo conjunto de puntos, de forma que  $T$  y  $T'$  sean compatibles, es decir, que su unión sea un grafo geométrico libre de cortes.

## 1 Introducción.

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general y  $K(S)$  el grafo geométrico completo asociado a ese conjunto de puntos, es decir, el grafo cuyos vértices son los puntos de  $S$  y cuyas aristas son todos los segmentos que conectan los puntos entre sí. Un subgrafo de  $K(S)$  se dice libre de cortes si las aristas que lo forman no se cortan entre sí y dos subgrafos de  $K(S)$  libres de cortes se dice que son compatibles si su unión sigue siendo un subgrafo de  $K(S)$  libre de cortes.

Diferentes trabajos abordan el problema del estudio de grafos compatibles, que básicamente se pueden agrupar en dos líneas de investigación. En la primera línea de investigación, se analiza la forma en que un subgrafo  $M$  de algún tipo (árbol, emparejamiento perfecto, ciclo hamiltoniano, ...) se puede transformar en otro  $M'$  del mismo tipo, mediante una serie de pasos  $M = M_0, M_1, \dots, M_k = M'$ , donde en cada paso  $M_{i+1}$  es un subgrafo del mismo tipo que  $M$  y compatible con  $M_i$ , y el paso entre  $M_i$  y  $M_{i+1}$  se realiza mediante algún tipo de operación predeterminada. Algunos trabajos en esta línea son [2, 3, 5, 11]. Véase [8] para una panorámica sobre el tema.

En la segunda de las líneas de investigación, se aborda el problema de la existencia de subgrafos compatibles y disjuntos. Dos subgrafos  $M$  y  $M'$  sobre el mismo conjunto de puntos se dicen compatibles y disjuntos cuando, además de ser compatibles,  $M$  y  $M'$  no tienen ninguna arista en común. Algunos trabajos en esta dirección y algunas otras variantes pueden verse en [1, 7, 9, 10].

En esta comunicación se estudia el siguiente problema. Dado un árbol geométrico  $T$  de  $K(S)$ , encontrar otro árbol geométrico  $T'$  de  $K(S)$  de forma que  $T$  y  $T'$  sean compatibles y disjuntos, y en caso de que no sea posible, encontrar un árbol compatible  $T'$  compartiendo con  $T$  el menor número posible de aristas. A esta mínima cantidad de aristas compartidas la denotaremos por  $d(T)$ .

En general, esta cantidad  $d(T)$  va a depender del árbol de partida  $T$  y de la posición de los puntos de  $S$ . Por ejemplo, si  $T$  es una estrella, entonces  $d(T) = 1$  para cualquier conjunto de  $n$  puntos. Si los puntos están en posición convexa, dado un árbol cualquiera  $T$ , es bien conocido que sólo se pueden añadir un máximo de  $n - 2$  aristas a  $T$  sin producir cortes. Por tanto, para obtener un árbol  $T'$  compatible con  $T$ , al menos ambos árboles van a compartir una arista. De hecho, dado cualquier árbol  $T$ , siempre se puede encontrar un árbol  $T'$  compartiendo sólo una arista con  $T$ . Así,  $d(T) = 1$  para cualquier árbol  $T$  sobre puntos en posición convexa.

\*Departamento de Métodos Estadísticos, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza. Pedro Cerbuna, 12, 50009-Zaragoza, España. {olaverri,jtejel}@unizar.es. Parcialmente subvencionados por los proyectos MEC MTM2006-01267 y Gobierno de Aragón E58-DGA.

†Departament de Matemàtica Aplicada II, Universitat Politècnica de Catalunya. Jordi Girona, 1-3, 08034-Barcelona, España. {Ferran.Hurtado,Clemens.Huemer}@upc.edu. Parcialmente subvencionados por los proyectos MEC MTM2006-01267 y DURSI 2005SGR00692

Además de estudiar  $d(T)$  para diferentes configuraciones de puntos y de árboles, estudiaremos también  $d_n = \max_{\{S, T\}} d(T)$ , donde  $S$  es cualquier nube de  $n$  puntos y  $T$  cualquier árbol generador sin cortes sobre los puntos de  $S$ . En la siguiente sección se muestran problemas equivalentes al del cálculo de  $d(T)$  y  $d_n$  y se analizan diferentes propiedades. En la Sección 3, se dan ejemplos de árboles en los que  $d_n$  vale  $\frac{n}{5}$  y en la Sección 4 se estudian algunos casos particulares.

## 2 Árboles geométricos compatibles y triangulaciones.

El siguiente lema nos proporciona diferentes equivalencias para  $d(T)$ .

**Lema 2.1.** *Sea  $F$  un bosque geométrico sobre los puntos de  $S$  disjunto y compatible con el árbol  $T$ ,  $t_F(T)$  el número de componentes (árboles de  $F$ ) y  $t(T) = \min_F t_F(T)$  tomado entre todos los posibles bosques  $F$  disjuntos y compatibles con  $T$ .*

*Sea  $\Delta$  una triangulación de  $S$  compatible con  $T$ , es decir obtenida añadiendo aristas a  $T$ ,  $c_\Delta(T)$  el número de componentes conexas de  $\Delta - T$  y  $c(T) = \min_\Delta c_\Delta(T)$  tomado entre todas las posibles triangulaciones compatibles con  $T$ . Entonces*

$$d(T) = t(T) - 1 = c(T) - 1$$

En lo que sigue vamos a estudiar propiedades de triangulaciones  $\Delta$  conteniendo a  $T$ , con el objetivo de calcular o estimar  $c(T) = d(T) + 1$ . Para simplificar la notación, dada una triangulación  $\Delta$ , llamaremos aristas negras a las aristas de  $T$  y aristas rojas a las otras. Las componentes de  $\Delta - T$  las denotaremos por  $C_1, \dots, C_h$ , ( $h = c_\Delta(T)$ ), y las llamaremos componentes rojas de la triangulación (dos puntos de  $S$  están en una misma componente roja si y sólo si hay un camino formado por aristas rojas entre esos dos puntos).

El siguiente lema sirve para ver cómo pueden ser esas componentes rojas.

**Lema 2.2.** *Sea  $P$  un polígono simple con al menos cuatro vértices y  $\Delta$  cualquier triangulación del interior de  $P$ . Supongamos que son rojas las aristas (diagonales) añadidas a  $P$  para formar  $\Delta$ , y sean  $v_1, \dots, v_k$  los vértices de  $P$  a los que no llega ninguna arista roja. Entonces,  $n/2 \geq k \geq 2$  y  $\Delta$  tiene exactamente  $k + 1$  componentes rojas. Cada uno de los vértices  $v_1, \dots, v_k$  es una componente roja, y los restantes  $n - k$  puntos de  $P$  forman otra componente roja.*

De este lema se desprende el siguiente corolario, que es usado en la demostración del Lema 2.10.

**Corolario 2.3.** *Supongamos que  $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  es un polígono simple y no convexo, y que todos sus vértices están etiquetados con un 1 ó con un 2. Supongamos que este etiquetado verifica además que hay dos vértices consecutivos  $v_i$  y  $v_{i+1}$  que tienen la misma etiqueta, digamos 1, y que al menos un vértice reflex tiene la otra etiqueta, la 2. Entonces en cualquier triangulación del interior de  $P$  hay al menos una arista roja conectando un punto de etiqueta 1 con un punto de etiqueta 2.*

El siguiente concepto de banda separadora nos permitirá conocer cómo se combinan las diferentes componentes rojas de  $\Delta$  que nos quedan al eliminar  $T$  y que no son puntos aislados.

**Definición 2.4.** *Sea  $\Delta$  una triangulación conteniendo a  $T$ . Una banda separadora en  $\Delta$  es un polígono simple  $B = (v_1, v_2, \dots, v_{k_1}, w_1, \dots, w_{k_2}, v_1)$  sin puntos de  $S$  en su interior y verificando:*

- $(v_{k_1}, w_1)$  y  $(w_{k_2}, v_1)$  son aristas negras pertenecientes a la frontera de la clausura convexa de  $S$ , y el resto de aristas de  $B$  son rojas.
- El interior de la banda  $B$  está triangulado con aristas negras.

En la figura 1 podemos ver una banda separadora para un árbol. Notar que una banda separadora  $B$  divide el conjunto  $S$  en dos partes, la parte donde están los puntos  $v_i$  que la denotaremos por  $S_v$  y la parte donde están los puntos  $w_i$  que la denotaremos por  $S_w$ . Como no hay aristas rojas conectando puntos de  $S_v$  con puntos de  $S_w$ , cualquier componente roja  $C_i$  de  $\Delta$  solo puede contener puntos de

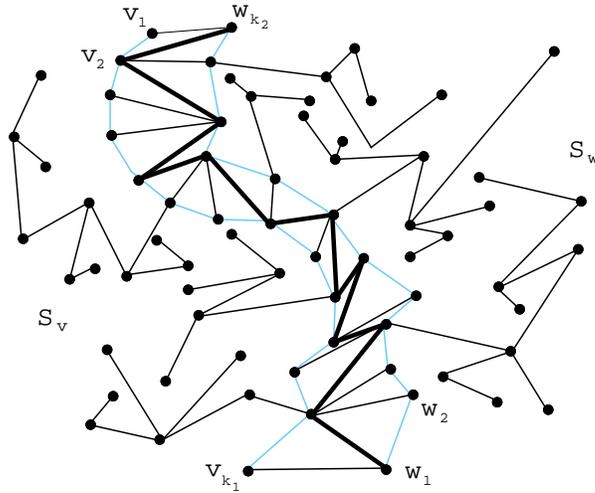


Figura 1: Una banda separadora.

una de las mitades. Cuando  $S_v$  (o  $S_w$ ) contiene sólo los puntos  $B_v = \{v_1, \dots, v_{k_1}\}$  de  $B$ , diremos que esa mitad es una semibanda.

Notar además que una banda es una secuencia de triángulos adyacentes, compartiendo un lado negro, y teniendo dos lados negros y el otro rojo. Por tanto, las aristas negras de la banda  $B$  forman una secuencia ordenada  $e_1 = (v_1, w_{k_2}), e_2 = (v_1, w_{k_2-1})o(v_2, w_{k_2}), \dots, e_{k_1+k_2-1} = (v_{k_1}, w_1)$ , donde cada arista  $e_i$  comparte un extremo con la siguiente  $e_{i+1}$ . La secuencia  $Z = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  formada por los vértices (eliminando repeticiones) comunes entre aristas  $e_i$  consecutivas, es una poligonal de aristas negras que llamaremos la línea zig-zag de la banda  $B$ . Este zig-zag une alternativamente puntos de  $S_v$  y  $S_w$  y lo podemos extender para que incluya a las dos aristas de  $B$  que están en la frontera de la clausura convexa.

**Teorema 2.5.** *Sea  $\Delta$  una triangulación conteniendo a  $T$ . Una componente roja  $C_i$  de  $\Delta$  o es un nodo aislado interior, o contiene puntos de la frontera de la clausura convexa de  $S$  y está separada de otras componentes rojas del mismo tipo mediante bandas separadoras.*

**Corolario 2.6.** *Sea  $T_C$  el grafo teniendo como nodos las componentes rojas  $C_1, \dots, C_h$  de  $\Delta$ , y con una arista entre  $C_i$  y  $C_j$ , si y sólo si, existe una arista de  $T$  uniendo un vértice de  $C_i$  con uno de  $C_j$ . Entonces  $T_C$  es un árbol, que llamaremos árbol de componentes rojas.*

**Corolario 2.7.** *Para cualquier triangulación  $\Delta$  conteniendo a  $T$*

$$c_\Delta \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$$

El peor caso del corolario anterior sucede cuando hay muchos puntos aislados en la frontera de la clausura convexa. La figura 2 muestra un ejemplo. La cota dada en ese corolario se puede mejorar usando el siguiente lema, que nos dice que, excepto en un caso, siempre se puede triangular  $T$  sin dejar puntos aislados en la clausura convexa de  $S$ .

**Lema 2.8.** *Dado un conjunto  $S$  de  $n \geq 3$  puntos y un árbol  $T$  sobre ellos, podemos completar  $T$  a una triangulación  $\Delta$  en la que ninguna banda separadora sea un triángulo, excepto para el caso de que los puntos de  $S$  estén en posición convexa y  $T$  sea un camino que recorre en orden esos puntos, en cuyo caso necesitamos incluir un triángulo.*

**Corolario 2.9.** *Cualquier árbol  $T$  que no sea una cadena convexa, admite una triangulación  $\Delta$  tal que*

$$c_\Delta(T) \leq \lfloor (n+2)/3 \rfloor$$

La figura 3 muestra un árbol  $T$  y una triangulación que alcanza la cota anterior, aunque claramente existen otras triangulaciones sobre el mismo árbol  $T$  con un menor número de componentes rojas.

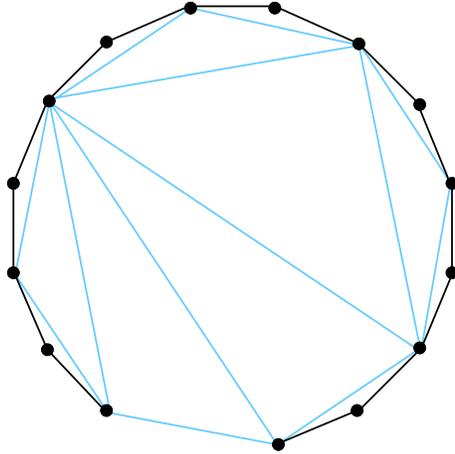


Figura 2: Una triangulación alcanzando la cota del corolario 2.7.

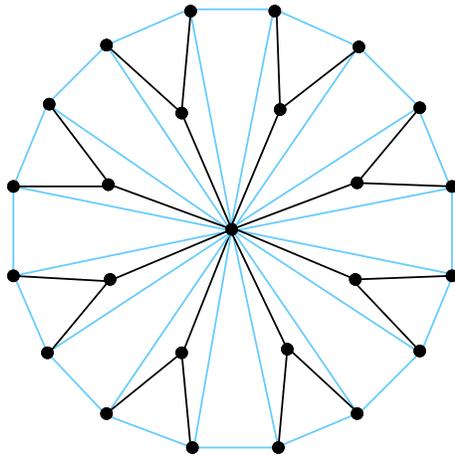


Figura 3: Una triangulación alcanzando la cota dada en el corolario 2.9.

Señalar por último que las bandas separadoras se pueden mover para obtener triangulaciones en las que una de las componentes rojas sea “grande”. El siguiente lema nos dice cómo realizar esta transformación.

**Lema 2.10.** *Sea  $B = (v_1, v_2, \dots, v_{k_1}, w_1, \dots, w_{k_2}, v_1)$  una banda separadora para  $T$ ,  $Z$  su correspondiente zig-zag línea y supongamos que  $S_w$  contiene algún vértice que no es de  $B_w$ . Entonces podemos trazar una arista roja desde un vértice de  $B_v$  a un vértice de  $S_w$ .*

**Corolario 2.11.** *Dado un árbol geométrico  $T$ , siempre existe una triangulación  $\Delta$  tal que el árbol de componentes  $T_C$  es una estrella. Además las hojas de  $T_C$  o son puntos aislados interiores o son las aristas de una semibanda.*

### 3 Número de puntos aislados de un árbol.

Dado un árbol geométrico  $T$  hemos visto que al triangular  $T$  pueden quedar componentes rojas formadas por un solo punto interior. Esta situación es a veces inevitable ya que el árbol puede contener puntos aislados, puntos tales que en ninguna triangulación  $\Delta$  de  $T$  llega a ellos una arista roja. La figura 4 muestra un ejemplo con muchos puntos aislados. El lema siguiente describe cómo debe ser un punto aislado.

**Lema 3.1.** *Sea  $T$  un árbol geométrico que no sea una estrella,  $u$  un vértice aislado de  $T$  y  $v_1, v_2, \dots, v_k$*

los vecinos de  $u$  que no son hojas de  $T$  numerados en el sentido del reloj. Supongamos que desde  $v_1$  sale otra arista  $(v_1, w_1)$  en la dirección del reloj desde el rayo  $(u, v_1)$ . Entonces:

i) Todas las aristas  $(v_i, w)$  con  $w$  cualquier vecino de  $v_i$  se encuentran también en la dirección del reloj desde el rayo  $(u, v_i)$ .

ii) Para  $i = 1, \dots, k$  sea  $w_i$  el vecino de  $v_i$  tal que el ángulo  $(u, v_i, w_i)$  sea mínimo. Entonces, la arista  $(v_i, w_i)$  es la primera arista de  $T$  cortada por el rayo  $(u, v_{i+1})$ . Igualmente, el rayo  $(w_i, v_i)$  en primer lugar corta o a la arista  $(v_{i-1}, w_{i-1})$ , o a la arista  $(u, v_{i-1})$  o a alguna arista  $(u, v)$ , donde  $v$  es una hoja de  $T$  y  $(u, v)$  está (en la dirección del reloj) entre  $(u, v_{i-1})$  y  $(u, v_i)$ .

Notar que si  $T$  no es una estrella y  $u$  es aislado, cualquier rayo saliendo de  $u$  tiene que cortar a una arista. Por tanto sólo puntos del interior de  $S$  y con grado al menos tres pueden ser aislados. De estas observaciones y del lema anterior se deducen los siguientes resultados.

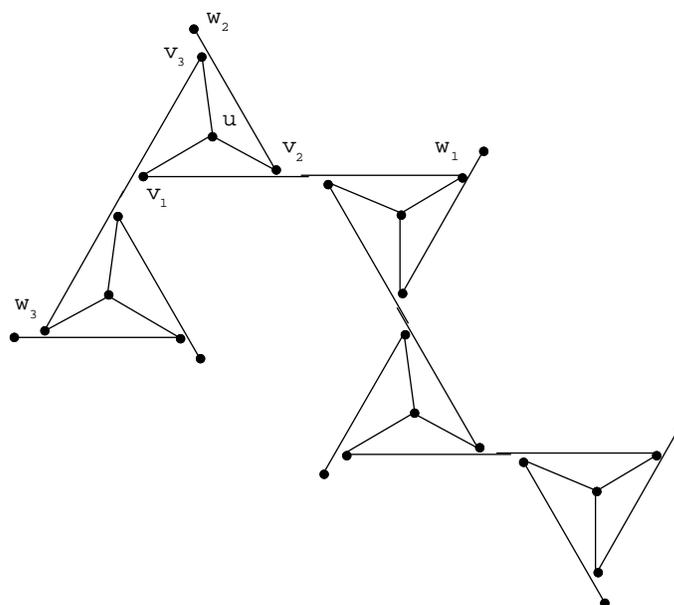


Figura 4: Un árbol con muchos puntos aislados.

**Lema 3.2.** Si un árbol  $T$  contiene  $k$  vértices aislados entonces tiene al menos  $5k + 2$  vértices. Además esta cota es ajustada.

**Teorema 3.3.** Para todo  $n \geq 3$ , se verifica que

$$\frac{n-2}{5} \leq d_n \leq \frac{n-1}{3}$$

## 4 Algunos casos especiales.

En esta sección vamos a ver algunos casos especiales e interesantes en los que conocemos el valor de  $c_T$ .

Sea  $T$  un árbol geométrico y sean  $u$  y  $v$  dos puntos consecutivos de la clausura convexa no adyacentes en  $T$ . Al añadir la arista  $(u, v)$  se forma un único ciclo en  $T \cup (u, v)$ . A este ciclo, junto con todos los puntos y aristas de  $T$  encerrados por el ciclo lo llamaremos bolsillo. Se tiene entonces el siguiente lema.

**Lema 4.1.** Sea  $T$  un árbol sobre  $S$  tal que todos los bolsillos de  $T$  son polígonos convexos. Entonces  $c_T$  es 1 o 2.

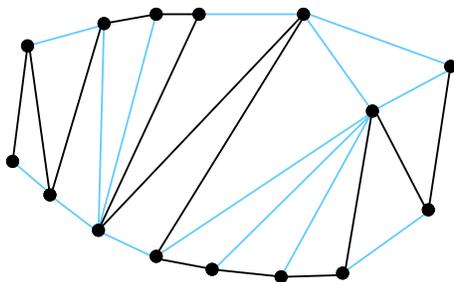


Figura 5: Un árbol camino tal que  $c_T = 2$  y  $d(T) = 1$ .

Cuando en lugar de un árbol, el grafo que se tiene de partida es un ciclo, es decir, un polígono simple, se puede demostrar el siguiente resultado.

**Lema 4.2.** *Sea  $P$  un polígono simple. Entonces  $c_P$  es ó 1 ó 2 ó 3. Además:*

- $c_P$  vale 3 sólo si  $P$  es un polígono convexo.
- Para que  $c_P$  pueda valer 2 es necesario que los vértices de  $P$  sean alternativamente reflex y convexos, excepto para vértices sobre la frontera de la clausura convexa que permitimos vértices convexos consecutivos.
- En los demás casos  $c_P$  vale 1.

Por último, para caminos se tiene el siguiente resultado.

**Lema 4.3.** *Sea  $T$  una camino simple uniendo los puntos de  $S$ . Entonces  $c_T$  es ó 1 ó 2.*

La figura 5 muestra un camino con  $c_T = 2$ .

## Referencias

- [1] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, T. Hackl and C. Huemer. Connecting colored point sets. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 155, Num. 3, pp. 271-278, 2007.
- [2] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, C. Huemer and H. Krasser. Transforming spanning trees and pseudo-triangulations. *Information Processing Letters*, 97 (1), pp. 19-22, 2006.
- [3] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, and F. Hurtado. Sequences of spanning trees and a fixed tree theorem. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 21(1-2), pp. 3-20, 2002. Special Issue.
- [4] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, F. Hurtado, and H. Krasser. *Towards compatible triangulations*. Theoretical Computer Science, Volume 296, Num. 1, pp. 3 - 13, 2003.
- [5] D. Avis and K. Fukuda. Reverse search for enumeration. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 65, pp. 21-46, 1996.
- [6] J. A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications* Elsevier Sciences. New York, 1976.
- [7] P. Bose, M. Houle and G. T. Toussaint. Every Set of Disjoint Line Segments Admits a Binary Tree. *Discrete and Computational Geometry*, 26(3), pp.387-410, 2001.
- [8] P. Bose and F. Hurtado, *Flips in planar graphs*, Technical Report TR-06-09, School of Computer Science, Carleton University, Ottawa, 2006.
- [9] J. Cerný, Z. Dvorák, V. Jelínek and J. Kára. Non-crossing Hamiltonian paths in geometric graphs. *Lecture Notes in Computer Science*, 2912, pp.86-97, 2004.

- [10] M. Hoffman and C. Tóth, Segment endpoint visibility graphs are Hamiltonian *Comput. Geom. Theory Appl.* 26, pp. 47-68, 2003.
- [11] M. H. Houle, F. Hurtado, M. Noy and E. Rivera-Campo, Graphs of triangulations and perfect matchings. *Graphs and Combinatorics* 21(3), pp. 325-331, 2005.
- [12] D. Rappaport, Computing simple circuits from a set of line segments is NP-complete *SIAM Journal on Computing* 18, pp. 1128-1139, 1989.