

# Geometrías Finitas y Planos Finitos Orientados\*

Jesús García-López \*\*

Ana Isabel Lías Quintero \*\*\*

## Resumen

Introducimos los planos finitos a partir de las geometrías finitas, objetos esencialmente combinatorios. Definimos el concepto de orientación de una geometría finita, los planos finitos como geometrías finitas orientables y demostramos la existencia de estas estructuras en algunos casos así como algunas propiedades.

## 1. Introducción

Intuitivamente, un plano finito está definido por un conjunto de puntos y un conjunto de rectas, ambos finitos. Las rectas, a su vez, están determinadas por conjuntos de puntos. Entonces, podemos interpretar los puntos como los constituyentes del plano finito y las rectas sus caminos geodésicos. Por razones de completitud del conjunto de caminos geodésicos, deberíamos pedir que dados dos puntos distintos cualesquiera, exista una recta que pasa por ellos. Si, además, pedimos que dicha recta sea única nos encontramos con las geometrías finitas [2]: geometrías planas afines y geometrías planas proyectivas.

**Definición 1.1.** Se llama *geometría plana afín de orden  $n$*  ( $n \geq 1$ ) a todo par  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  donde  $\mathcal{P}$  es un conjunto finito de puntos y  $\mathcal{R}$  un conjunto finito de rectas, es decir de subconjuntos de puntos, que verifican:

1. Dados dos puntos distintos cualesquiera, existe una única recta incidente en ellos.
2. Dados un punto  $P$  y una recta  $r$  no incidentes, existe una única recta incidente en  $P$  que no tiene puntos en común con  $r$ .
3. Existen cuatro puntos distintos entre los que no hay tres incidentes en la misma recta.
4. Hay al menos una recta con exactamente  $n$  puntos distintos.

Esta estructura es más combinatoria que geométrica pues, en efecto, no incluyen ninguna propiedad topológica que permita definir una distancia o una relación de vecindad entre puntos. Para definir planos orientados finitos introducimos los elementos métrico-topológicos que faltan. Pero, antes vamos a recordar algunas propiedades combinatorias de estas geometrías finitas [2, 3].

**Proposición 1.2.** *Una geometría plana afín de orden  $n$  verifica que:*

1. *El número de puntos es igual a  $n^2$ .*
2. *El número de rectas es igual a  $n^2 + n$ .*
3. *Cada recta contiene exactamente  $n$  puntos.*
4. *Por cada punto pasan exactamente  $n + 1$  rectas.*

---

\*Geometrías finitas orientables

\*\*Dpto. de Matemática Aplicada, Escuela U. de Informática, Universidad Politécnica de Madrid [jglopez@eui.upm.es](mailto:jglopez@eui.upm.es)

\*\*\*Dpto. de Matemática Aplicada, Escuela U. de Informática, Universidad Politécnica de Madrid [alias@eui.upm.es](mailto:alias@eui.upm.es)

5. No satisface el principio de dualidad.

De modo análogo, se define axiomáticamente la geometría plana proyectiva que, desde el punto de vista teórico, es más sencilla de analizar puesto que cumple el principio de dualidad. Existe una relación entre una geometría plana proyectiva de orden  $n$  y una afín del mismo orden, lo que acostumbramos a llamar *espacio afín subyacente*.

**Proposición 1.3.** *Sea una geometría plana proyectiva de orden  $n$ ,  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ , donde  $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_{n^2+n+1}\}$  es el conjunto de rectas. Sea  $r_i = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_{n+1}}\}$ . Entonces  $(\mathcal{P} - \{P_{i_1}, \dots, P_{i_{n+1}}\}, \mathcal{R} - \{r_i\})$  es una geometría plana de orden  $n$ .*

Para finalizar esta breve introducción recordamos algunos resultados conocidos:

- Veblen-Bussey (1906): Si  $n$  es potencia de primo entonces hay planos proyectivos de orden  $n$ .
- Bruck-Ryser (1949): Sea  $n$  un entero que no es potencia de un primo. Si  $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$  y  $n$  no es la suma de dos cuadrados entonces no hay planos proyectivos de orden  $n$ . Con este criterio descartamos algunos valores:  $n = 6, 14, 21, 22, \dots$
- Lam-Swiercz-Thiel (1988): No existen planos proyectivos de orden 10.
- Hasta el momento se sabe que:

$n = 2$	1	$n = 7$	1
$n = 3$	1	$n = 8$	1
$n = 4$	1	$n = 9$	4
$n = 5$	1	$n = 10$	0
$n = 6$	0	...	...

- Se conjetura que sólo existen planos proyectivos de orden potencia de un primo.

## 1.1. Geometrías afines de orden $n$ , con $n$ primo

Cuando  $n$  es un número primo se puede generar una geometría plana proyectiva mediante el siguiente procedimiento:

**Algoritmo 1.4.** CONSTRUCCIÓN DE UN PLANO PROYECTIVO DE ORDEN  $n$ , CON  $n$  UN NÚMERO PRIMO

1. Generación de puntos:
  - a) Generar  $n^2$  puntos etiquetados de la forma  $P(f, c)$ , donde  $f, c = 0, \dots, n - 1$ .
  - b) Generar  $n$  puntos etiquetados de la forma  $P(c)$ , con  $c = 0, \dots, n - 1$ .
  - c) Crear el punto  $P$ .
2. Generación de rectas:
  - a) Generar la recta  $L = \{P, P(0), \dots, P(n - 1)\}$ .
  - b) Generar  $n$  rectas de la forma  $L(c) := \{P, P(0, c), \dots, P(n - 1, c)\}$ , con  $c = 0, \dots, n - 1$ .
  - c) Generar  $n^2$  rectas de la forma

$$L(f, c) := \{P(c)\} \cup \{P((f + ci) \pmod{n}, i) / i = 0, \dots, n - 1\} \quad \text{con } f, c = 0, \dots, n - 1.$$

Nótese que  $(f + ci) \pmod{n}$  irá recorriendo todos los valores posibles, al ir variando el valor de  $i = 0, \dots, n - 1$  sólo en el caso de que  $n$  sea primo.

**Ejemplo 1.5.** Usando el algoritmo anterior se genera una geometría proyectiva de orden 3. Si eliminamos todas las apariciones de la recta  $L$  y de sus puntos obtenemos un espacio afín de orden 3. Las tablas siguientes muestran las rectas incidentes en cada punto y los puntos incidentes en cada recta. La tabla de puntos, por motivos que se justificarán posteriormente, está ordenada lexicográficamente.

Puntos	0	1	2	3
P(0,0)	L(0)	L(0,1)	L(0,2)	L(0,0)
P(1,0)	L(0)	L(1,1)	L(1,2)	L(1,0)
P(2,0)	L(0)	L(2,1)	L(2,2)	L(2,0)
P(0,1)	L(1)	L(2,1)	L(1,2)	L(0,0)
P(1,1)	L(1)	L(0,1)	L(2,2)	L(1,0)
P(2,1)	L(1)	L(1,1)	L(0,2)	L(2,0)
P(0,2)	L(2)	L(1,1)	L(2,2)	L(0,0)
P(1,2)	L(2)	L(2,1)	L(0,2)	L(1,0)
P(2,2)	L(2)	L(0,1)	L(1,2)	L(2,0)

Rectas			
L(0)	P(0,0)	P(1,0)	P(2,0)
L(1)	P(0,1)	P(1,1)	P(2,1)
L(2)	P(0,2)	P(1,2)	P(2,2)
L(0,0)	P(0,0)	P(0,1)	P(0,2)
L(1,0)	P(1,0)	P(1,1)	P(1,2)
L(2,0)	P(2,0)	P(2,1)	P(2,2)
L(0,1)	P(0,0)	P(1,1)	P(2,2)
L(1,1)	P(1,0)	P(2,1)	P(0,2)
L(2,1)	P(2,0)	P(0,1)	P(1,2)
L(0,2)	P(0,0)	P(2,1)	P(1,2)
L(1,2)	P(1,0)	P(0,1)	P(2,2)
L(2,2)	P(2,0)	P(1,1)	P(0,2)

(1)

## 2. Planos finitos orientados

En esta sección introducimos los axiomas que definen un *plano finito orientado* que se basarán en un orden cíclico establecido para los puntos y las rectas de la geometría plana afín. Estas ordenaciones que permiten orientar la geometría plana afín deben ser consistentes.

**Definición 2.1.** Una geometría plana afín se dice que está orientada si están ordenados cíclicamente los  $n$  puntos de cada recta y las  $n + 1$  rectas del haz de rectas incidentes en un punto. A la lista circular de rectas incidentes en un punto  $P$  la denotaremos  $\mathcal{C}(P)$ .

Fijados un punto  $P$ , una recta  $r \in \mathcal{C}(P)$  y un entero  $z$  entre 1 y  $n$ , definimos dos operadores:

**Definición 2.2.** Sea  $\Pi_1 : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathcal{P}$  tal que  $\Pi_1(x, y)$  devuelve el punto que se obtiene del siguiente modo:

1. Partiendo de  $P$  en la recta  $r$  avanzamos  $x$  posiciones (en la lista cíclica de puntos), obteniendo un punto  $P_1$ .
2. Partiendo de  $r$  en el punto  $P_1$  avanzamos  $z$  posiciones en la lista  $\mathcal{C}(P_1)$ , obteniendo una recta  $r_1$ .
3. Partiendo de  $P_1$  en la recta  $r_1$  avanzamos  $y$  posiciones obteniendo finalmente  $\Pi_1(x, y)$ .

Análogamente llamamos  $\Pi_2(x, y)$  al punto que se obtiene del siguiente modo:

1. Partiendo de  $r$  en el punto  $P$  avanzamos  $z$  posiciones en  $\mathcal{C}(P)$  obteniendo una recta  $r_2$ .
2. Partiendo de  $P$  en la recta  $r_2$  avanzamos  $y$  posiciones, obteniendo un punto  $P_2$ .
3. Partiendo de  $r_2$  en el punto  $P_2$  retrocedemos  $z$  posiciones en  $\mathcal{C}(P_2)$ , obteniendo una recta  $r_3$ .
4. Partiendo de  $P_2$  en la recta  $r_3$  avanzamos  $x$  posiciones, obteniendo finalmente  $\Pi_2(x, y)$ .

**Definición 2.3.** Diremos que una geometría plana orientada está bien orientada si fijada una terna cualquiera  $(P, r, z)$ , siendo  $P$  un punto,  $r \in \mathcal{C}(P)$  y  $z$  un entero entre 1 y  $n$ , se verifica que  $\Pi_1(x, y) = \Pi_2(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ .

La definición de plano finito orientado presupone los axiomas de la geometría plana afín y, además, la existencia de una buena orientación.

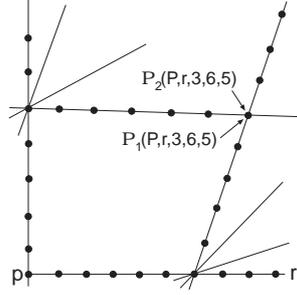


Figura 1: Interpretación de  $\Pi_1(x, y)$  y  $\Pi_2(x, y)$

**Definición 2.4.** Llamamos *plano finito orientado de orden  $n$*  a toda geometría plana afín de orden  $n$  bien orientada. En este caso, fijada la terna  $(P, r, z)$ , notaremos

$$\Pi(x, y) = \Pi_1(x, y) = \Pi_2(x, y)$$

Obsérvese que con la notación anterior si un punto  $Q$  está en la recta  $r$  se representa de la forma  $\Pi(x, 0)$  mientras que si está en la recta que incide en  $P$  y ocupa la posición  $z$ -ésima es de la forma  $\Pi(0, y)$ .

Las rectas anteriores juegan el papel de los ejes  $OX$  y  $OY$  del plano euclídeo real, y la condición anterior no es más que exigir que al avanzar  $x$  posiciones por el eje  $OX$  y luego avanzar  $y$  posiciones por la recta paralela al eje  $OY$  en ese punto se obtiene el mismo punto que si avanzamos primero  $y$  posiciones por el eje  $OY$  y después, en ese punto, avanzamos  $x$  posiciones por la recta paralela al eje  $OX$ .

La consistencia de la orientación de una geometría plana afín implica que podemos establecer sistemas de referencia y coordenadas.

**Proposición 2.5.** Sea un plano afín orden  $n$ , y  $P \in \mathcal{P}$ ,  $r \in \mathcal{R}$  con  $P \in r$  y  $1 \leq z \leq n$ . Se verifica que todo punto  $Q$  del plano se puede representar de manera única de la forma  $\Pi(x, y)$ , esto es, existen  $0 \leq x, y < n$  únicos tales que  $Q = \Pi(x, y)$ .

**Definición 2.6.** En las condiciones de la proposición anterior, llamamos *coordenadas del punto  $P$  respecto del sistema de referencia  $SR = \{O, r, z\}$*  a los enteros  $x$  e  $y$ . Si el sistema de referencia está claro, notaremos el punto  $P$  de la forma  $P(x, y)$ . Al punto  $O$  lo llamaremos origen del sistema de referencia.

**Observación 2.7.** Un sistema de referencia también puede venir dado por  $\{O, r_1, r_2\}$ , siendo  $r_1, r_2 \in \mathcal{C}(O)$ .

**Observación 2.8.** En la demostración de la propiedad anterior, se tiene que si  $P_i$  y  $P_j$  son dos puntos de  $r$  y  $r_i$  y  $r_j$  son las rectas incidentes en  $P_i$  y  $P_j$ , respectivamente, que ocupan la posición  $z$ -ésima, entonces dichas rectas son paralelas. El enunciado recíproco también es cierto.

**Corolario 2.9.** Si  $r_i$  y  $r_j$  son dos rectas paralelas que inciden en  $r$  en sendos puntos  $P_i$  y  $P_j$  respectivamente entonces las rectas aparecen en la misma posición en las listas de incidencia de cada punto.

**Corolario 2.10.** Dos rectas  $r_1$  y  $r_2$  incidentes en dos puntos de  $r$ ,  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente, ocupan la misma posición en las listas de incidencia de ambos puntos si y sólo si las rectas  $r_1$  y  $r_2$  son paralelas.

**Corolario 2.11.** Las geometrías proyectivas no son orientables.

**Ejemplo 2.12.** Modelo de plano finito orientado afín de orden  $n = 3$ : Si consideramos las ordenaciones de puntos y rectas dadas en las tablas del ejemplo anterior se obtiene un plano finito orientado de orden 3. De hecho, fijado el sistema de referencia  $\{P(0, 0), L(0, 0), 3\}$ , las coordenadas de los puntos coinciden con las etiquetas que les son asignadas en la ejecución del algoritmo. Respecto de este sistema

de referencia se puede comprobar que las rectas  $L(f, c)$ , con  $f, c = 0, 1, 2$  es el lugar geométrico de los puntos  $(x, y) \in \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$  que verifican la relación de la última columna son:

Rectas				Ecuación
L(0)	P(0,0)	P(1,0)	P(2,0)	$x = 0$
L(1)	P(0,1)	P(1,1)	P(2,1)	$x = 1$
L(2)	P(0,2)	P(1,2)	P(2,2)	$x = 2$
L(0,0)	P(0,0)	P(0,1)	P(0,2)	$y = 0$
L(1,0)	P(1,0)	P(1,1)	P(1,2)	$y = 1$
L(2,0)	P(2,0)	P(2,1)	P(2,2)	$y = 2$
L(0,1)	P(0,0)	P(1,1)	P(2,2)	$y = x$
L(1,1)	P(1,0)	P(2,1)	P(0,2)	$y = x + 2$
L(2,1)	P(2,0)	P(0,1)	P(1,2)	$y = x + 1$
L(0,2)	P(0,0)	P(2,1)	P(1,2)	$y = 2x$
L(1,2)	P(1,0)	P(0,1)	P(2,2)	$y = 2x + 1$
L(2,2)	P(2,0)	P(1,1)	P(0,2)	$y = 2x + 2$

En este ejemplo se observa que “la pendiente” de las rectas coincide con el valor del parámetro  $c$ . Este hecho no es casual.

**Definición 2.13.** Dados dos puntos de un plano de orden  $n$  primo,  $P = (x_1, y_1)$ ,  $Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n$ , llamamos pendiente de recta que ambos determinan al valor:

$$m := \begin{cases} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & \text{si } x_2 \neq x_1; \\ \infty, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

**Proposición 2.14.** Sea la recta  $r \in \{L(c)\}_{c=0,\dots,n-1} \cup \{L(f, c) / f, c = 0, \dots, n-1\}$ . Se verifica que

- Dos puntos cualesquiera de  $r$  definen la misma pendiente.
- Dados  $(x_0, y_0) \in \mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n$  y  $m_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ , definimos el conjunto:

$$[(x_0, y_0), m_0] = \{(x, y) \in \mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n / y = y_0 + m_0(x - x_0)\}$$

Se verifica que  $[(x_0, y_0), m_0] = L(x_0 - y_0 m_0^{-1}, m_0)$ .

**Teorema 2.15.** Existen planos finitos orientados de orden  $n$  primo.

*Demostración. (planteamiento)* Para construir un plano finito orientado de orden  $n$ , un número primo, se puede proceder como sigue:

1. Generar los puntos y las rectas según el algoritmo de construcción de geometrías finitas afines de orden  $n$ .
2. Ordenar los  $n$  puntos de cada recta mediante el orden lexicográfico.
3. Ordenar las  $n + 1$  rectas incidentes en cada punto por orden creciente de la pendiente  $m = 0, 1, \dots, n-1, \infty$ .

Se verifica que la ordenación anterior es consistente.

□

### 3. Planos finitos orientados y cuadrados latinos

Aunque nuestro objetivo es dotar a los planos finitos orientados de una topología, no podemos permanecer ajenos a su naturaleza combinatoria, en concreto, a su relación con los cuadrados latinos [7]. Recordamos que:

**Definición 3.1.** Un cuadrado latino de orden  $n$  es una matriz cuadrada de orden  $n$  con coeficientes en  $\{1, 2, \dots, n\}$  de manera que cada valor aparece una única vez en cada fila y en cada columna. Dos cuadrados latinos  $A$  y  $B$  son ortogonales entre sí cuando

$$\forall k, l \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ existe un único par } (i, j) \text{ tal que } A(i, j) = k \text{ y } B(i, j) = l$$

Se sabe que:

**Proposición 3.2.** Si  $A$  y  $B$  son cuadrados latinos ortogonales entre sí y  $\sigma$  y  $\tau$  son dos permutaciones del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  entonces  $\sigma A$  y  $\tau B$  son cuadrados latinos ortogonales entre sí, siendo  $(\sigma A)(x, y) = A(\sigma(x), \sigma(y))$  y  $(\tau B)(x, y) = B(\tau(x), \tau(y))$ .

**Proposición 3.3.** Dado  $n \geq 3$ , existen  $n - 1$  cuadrados latinos ortogonales dos a dos si y sólo si hay un plano afín de orden  $n$ .

En la proposición anterior, los cuadrados latinos están asociados a una clase de equivalencia de rectas paralelas. La propiedad de que el plano afín esté bien orientado se traduce en una propiedad de los cuadrados latinos asociados a estas  $n - 1$  clases de rectas. Ilustramos la observación anterior con el siguiente ejemplo, en el que mostramos que  $\mathbb{F}(2^2)$  no es un plano afín bien orientado.

**Ejemplo 3.4.** El plano afín de orden 4,  $AG(2, 2^2)$ , consta de 16 puntos y 20 rectas. En cada punto inciden 5 rectas que dan lugar a sendas clases de equivalencia de rectas paralelas. En cada clase hay 4 rectas. Seleccionamos dos de esas clases,  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$  y  $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ , y llamaremos a sus elementos rectas horizontales y rectas verticales respectivamente. Como cada punto está en única recta horizontal  $H_j$  y en única recta vertical  $V_i$ , y estas rectas no son paralelas, notaremos  $(i, j)$  al punto de intersección.

Sean  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  las clases de rectas paralelas restantes,  $\mathcal{C}_i = \{L_{i1}, L_{i2}, L_{i3}, L_{i4}\}$ . Para cada  $i$  se construye la matriz  $A_i$  del siguiente modo:

$$A_i(x, y) = j \quad \text{si } (x, y) \in L_{ij}, \text{ para } x, y, j = 1, \dots, 4, \quad i = 1, 2, 3$$

Se puede comprobar que cada  $A_i$  es un cuadrado latino y  $\{A_1, A_2, A_3\}$  es un conjunto de cuadrados latinos ortogonales dos a dos. Cada cuadrado latino  $A_i$  define una clase de rectas paralelas, y cada una de las rectas de una misma clase,  $L_{ij}$ , viene determinada por los  $(x, y)$  que toman un mismo valor  $j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

Veamos si es posible dotar al plano de una buena ordenación. Para ello, consideramos los puntos de  $H_1$  y  $V_1$ , ordenados con el orden lexicográfico, y el sistema de referencia  $\{O(1, 1), H_1, V_1\}$ . Para que  $\Pi_1(x, y) = \Pi_2(x, y)$  necesariamente en cada  $H_i$  y en cada  $V_j$  los puntos quedan ordenados con el orden lexicográfico. Faltan por ordenar los puntos de las rectas  $L_{ij}$ . Podemos suponer que la primera fila de los tres cuadrados latinos es  $(1 \ 2 \ 3 \ 4)$ , es decir,

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Eso implica que los cuadrados tienen valores distintos en las restantes posiciones. Para colocar el 1 en la 2ª fila hay tres posibilidades. Pero, para que  $\Pi_1(O, H_1, L_{i1}, x, 1) = \Pi_2(O, H_1, L_{i1}, x, 1)$  debe

ocurrir que las filas de esos tres casos sean:

$$\begin{array}{cccc}
 * & * & * & * \\
 * & * & * & * \\
 4 & 1 & 2 & 3 \\
 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccc}
 * & * & * & * \\
 * & * & * & * \\
 3 & 4 & 1 & 2 \\
 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccc}
 * & * & * & * \\
 * & * & * & * \\
 2 & 3 & 4 & 1 \\
 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array}$$

$A_1 \qquad A_2 \qquad A_3$

Puesto que, para que el plano esté bien orientado las filas de los cuadrados latinos deben ser una permutación cíclica de la primera fila, se comprueba que los dos casos posibles de completar las filas nos dan cuadrados latinos que no son ortogonales dos a dos, a saber:

$$\begin{array}{cccc}
 2 & 3 & 4 & 1 \\
 3 & 4 & 1 & 2 \\
 4 & 1 & 2 & 3 \\
 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccc}
 4 & 1 & 2 & 3 \\
 2 & 3 & 4 & 1 \\
 3 & 4 & 1 & 2 \\
 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccc}
 3 & 4 & 1 & 2 \\
 4 & 1 & 2 & 3 \\
 2 & 3 & 4 & 1 \\
 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array}$$

$A_1 \qquad A_2 \qquad A_3$

$$\begin{array}{cccc}
 3 & 4 & 1 & 2 \\
 2 & 3 & 4 & 1 \\
 4 & 1 & 2 & 3 \\
 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccc}
 2 & 3 & 4 & 1 \\
 4 & 1 & 2 & 3 \\
 3 & 4 & 1 & 2 \\
 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccc}
 4 & 1 & 2 & 3 \\
 3 & 4 & 1 & 2 \\
 2 & 3 & 4 & 1 \\
 1 & 2 & 3 & 4
 \end{array}$$

$A'_1 \qquad A'_2 \qquad A'_3$

**Ejemplo 3.5.** En el caso de  $AG(2, 5)$ , una familia de 4 cuadrados latinos mutuamente ortogonales cuyas filas se obtienen a partir de la primera mediante permutaciones cíclicas es la siguiente:

$$\begin{array}{cccccc}
 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & \\
 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\
 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & \\
 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccccc}
 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\
 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & \\
 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccccc}
 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & \\
 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & \\
 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccccc}
 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & \\
 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & \\
 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 
 \end{array}$$

$A_1 \qquad A_2 \qquad A_3 \qquad A_4$

## 4. Consideraciones finales

Las líneas de trabajo actuales tienen dos vertientes diferenciadas: una relacionada con la búsqueda de propiedades topológicas y la definición de una métrica en los planos orientados mientras que la otra se desarrolla dentro del ámbito de la combinatoria.

### 4.1. Planos finitos orientados y matrices circulantes

A la vista de la sección anterior, la existencia de planos finitos orientados de orden  $n$  implica la existencia de una familia de  $n - 1$  cuadrados latinos mutuamente ortogonales cuyas filas se obtienen a partir de una permutación cíclica de la primera de ellas. En el caso  $AG(2, p^n)$ , la existencia de tal familia no está garantizada, mientras que en el caso  $AG(2, p)$  estos cuadrados son casos particulares de matrices circulantes. Esta es una línea de trabajo abierta.

Por otra parte, la definición de plano finito orientado resulta ser muy restrictiva. Por ello, se ha pensado en una definición de orientación más general para el caso  $AG(2, p^n)$  que sea compatible con la dada para el caso  $AG(2, p)$ . La idea consiste en considerar sólo las  $p + 1$  rectas de la forma

$$\begin{array}{ll}
 y = mx + c, & \text{con } m \in GF(p), c \in GF(p^n) \\
 x = a, & \text{con } a \in GF(p^n)
 \end{array}$$

A este subhaz de rectas incidentes en  $P$  lo denotaremos  $\mathcal{C}^*(P)$ . Por otra parte en  $X$ , el conjunto de puntos de  $AG(2, p^n)$ , se define una partición en  $p^{2n-2}$  conjuntos,  $\{M_f\}_{f=1..p^{2n-2}}$ , cada uno de ellos con  $p^2$  elementos.

Cada conjunto  $M_f$  se puede dotar de una estructura de incidencia donde las rectas son los subconjuntos de  $M_f$  de la forma

$$r \cap M_f, \quad r \in \mathcal{C}^*(P), \quad P \in M_f.$$

Conjeturamos que la estructura anterior es isomorfa al plano orientado  $AG(2, p)$ . Los operadores  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  se generalizarán: se orientan los  $p^{2n-2}$  planos de orden  $p$  y, recursivamente, se ordenan el conjunto de índices  $\{1, \dots, p^{2n-2}\}$ . Para ello, se añade un argumento adicional a los operadores que hace referencia al orden de los planos orientados.

## 4.2. Ángulos, triángulos y paralelogramos en un plano finito orientado

Otro aspecto en el que estamos trabajando es en la definición de los conceptos básicos de la geometría euclídea para el caso de los planos finitos orientados. Dado un plano finito orientado de orden  $n$  podemos considerar el grafo asociado que consiste en identificar puntos con vértices. Dos vértices son adyacentes si los puntos respectivos, con la orientación establecida, están colocados consecutivamente en la recta que ellos determinan.

Puesto que las rectas vienen dadas por listas de puntos ordenadas cíclicamente, en el grafo asociado cada recta da lugar a un ciclo de longitud  $n$ . En cada ciclo asociado a una recta se tienen dos caminos para conectar cualquier pareja de puntos  $P$  y  $Q$  de la recta. Estos caminos se corresponden con recorrer la lista de  $P$  hacia  $Q$  o bien de  $Q$  hacia  $P$ . Esta idea nos ha permitido definir conceptos como segmento determinado por dos puntos, ángulo formado por dos segmentos con extremo común (rectas incidentes en un punto), y las dos figuras geométricas básicas: el triángulo y el paralelogramo. En este sentido se han obtenido propiedades que recuerdan el plano euclídeo donde se observa que el papel que juegan los  $2\pi$  radianes en el plano euclídeo es el que desempeña aquí el entero  $2(n+1)$ , siendo  $n+1$  el número de rectas incidentes en un punto [1].

Si el ángulo que forman dos rectas no paralelas  $r_1$  y  $r_2$  es un ángulo recto, es decir  $\frac{n+1}{2}$ , al igual que en el plano euclídeo, se verifica que

**Lema 4.1.** *En un triángulo a lo sumo hay un ángulo recto.*

Sin embargo, en un plano finito orientado y para triángulos cualesquiera no se verifica la propiedad de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.

**Proposición 4.2.** *Se considera el triángulo determinado por  $[A, B, C]$ , tres puntos no alineados de modo que  $\tilde{\angle}(AB, BC) < n+1$ ,  $\tilde{\angle}(BC, CA) < n+1$  y  $\tilde{\angle}(CA, AB) < n+1$ . Entonces, la suma de los ángulos de un triángulo es  $n+1$  (dos ángulos rectos).*

## Referencias

- [1] GARCÍA-LÓPEZ, J.; LÍAS QUINTERO, A. Geometrías finitas y espacios discretos finitos. Actas de V Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica, 2006.
- [2] DEMBOWSKI, P. *Finite Geometries*. Springer-Verlag, 1997.
- [3] STINSON, D.R. *Combinatorial Designs. Constructions and Analysis*. Springer-Verlag, 2004.
- [4] CEDEBERG, J.N. *A Course in Modern Geometries*. Springer-Verlag, 1991.
- [5] ARTZY, R. *Geometry. An Algebraic Approach*. Wissenschaftsverlag, 1992.
- [6] HIRSCHFELD, J.W.P. *Geometries over Finite Fields. Second Edition*. Oxford Science Publications, 1998.
- [7] IONIN, Y. J.; SHRIKHANDE, M.S. *Combinatorics of Symmetric Designs*. Cambridge University Press, 2006.