Teoría de autómatas y lenguajes formales
Ejercicios para empezar

Febrero de 2004

Sólo necesitan los prerrequisitos y pensar un poco.

1. Representación en base 2 sin 0. Se pueden representar todos los números enteros estrictamente positivos en base 2 sin utilizar el 0, pero utilizando el 2. La notación es también posicional, utilizando el 2 como base, de forma que, por ejemplo, 12 representa al $4 = 2 * 1 + 1 * 2$ y 21 representa al $5 = 1 * 1 + 2 * 2$.

   Dado un número, como 41, por ejemplo, en base 2 se representaría en la forma 101001. Para representarlo en base 2 sin 0, se tomaría el primer 10 para sustituirlo por 2, obteniendo 21001. Nuevamente el primer 10 de stas representación se sutituiría por 02, para tener 20201. El primer 0 puede desaparecer si restamos 1 al primer 2 para poner 12201 y el 0 que queda, de la misma manera, se elimina obteniendo $12121 = 1 + 2 * 2 + 1 * 4 + 2 * 8 + 1 * 16 = 1 + 4 + 4 + 16 + 16 = 41$. A partir del número se puede obtener directamente la representación dividiendo sucesivamente por 2, pero en el caso de dividendo par, el cociente se rebaja en 1 para obtener 2 de resto (ver figura).

   Escríbase un programa que permita la conversión de base 10 a base 2 sin 0 y viceversa.

2. Dada la sucesión de cadenas de símbolos 101, 0101, 11, 000, 10, 0010, 1000 ordénese de forma creciente, según los siguiente criterios:

   a) orden numérico (según el valor que representan en base 2)

   b) orden lexicográfico (el de los diccionarios), suponiendo que '0' <'1'

   c) orden "natural": entre dos cadenas de distinta longitud, la más corta está antes, y dentro de la misma longitud, se conserva el orden lexicográfico.

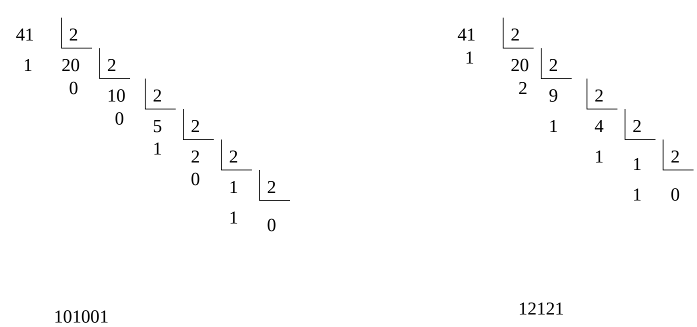

Figura 1: Representación en base 2 con y sin ceros

3. Dados dos números enteros estrictamente positivos p y q, demostrar que p/q tiene una representación decimal finita o periódica, es decir que, al dividir y obtener el cociente como $e.d_1d_2d_3\ldots$ o bien alguno de los d_i es 0 (y todos los posteriores), i o a partir de cierto momento se obtiene un tramo $d_rd_{r+1}\ldots d_s$ que se repite indefinidamente. (Nota: para tener representación finita, siendo la fracción p/q irreducible, q debe ser de la forma 2^n5^m con n y $m \geq 0$)

4. ¿Para qué valores es cierto que $n! > n^3$? Demuéstrese.

5. Se considera la siguiente definición de función :

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1 & \text{si } n = 4k+1 \\ 3n-1 & \text{si } n = 4k-1 \end{cases}$$

   Dado un número $n > 0$, se considera la sucesión formada por la aplicación de f a n y a partir de aquí las sucesivas aplicaciones de f al resultado: $f(n), f(f(n))\ldots f^r(n)\ldots$

   Considérese "terminada" la sucesión si se alcanza el valor 1.

   ¿Para qué valores de n se termina la sucesión? Demuéstrese.

6. Demuéstrese por inducción que

   a) $\Sigma_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$
   b) $\Sigma_{i=1}^{n} i^3 = (n(n+1)/2)^2$

7. Determínese la finitud o numerabilidad de

   a) la unión de 3 conjuntos finitos, no necesariamente disjuntos
   b) la unión de 3 conjuntos infinitos numerables, no necesariamente disjuntos
   c) el conjunto de los números enteros positivos pares
   d) el conjunto formado por todos los subconjuntos finitos de N

8. Un profesor de Programación decide supender a todo alumno cuyo programa entre en un bucle infinito para alguna de las entradas 1, 2 ó 3. Como tiene muchos alumnos, decide escribir un programa que determine, tomando como entrada un programa de alumno, si debe suspenderle. Piense cómo podría hacerlo. (NOTA: este problema está envenenado).