Slide 1

Alfabeto: conjunto finito no vacío de "símbolos"

Cadena *sobre un alfabeto*: sucesión **finita** de símbolos (en los que un símbolo puede aparecer varias veces).

Cadena vacía :

Se denotará por ε ó λ

A^* : conjunto de todas las cadenas sobre A (lenguaje universal)

$$\#A^* = \aleph_0$$

Lenguaje *sobre un alfabeto* A: subconjunto de A^* = conjunto de cadenas sobre A: $L \subseteq A^*$; $L \in \mathcal{P}(A^*)$

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{P}(A^*)$$

$$\#\mathcal{L}(A) = c \text{ (cardinal del continuo)}$$

Slide 2

Concatenación. Propiedades

Asociatividad: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

No conmutatividad: $x \cdot y \neq y \cdot x$ (en general)

Elemento neutro: $x \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot x = x$

Leyes de cancelación:

$x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z$

$x \cdot y = z \cdot y \Rightarrow x = z$

Longitudes :

$|\varepsilon| = 0$

$|x \cdot y| = |x| + |y|$

Slide 3

Subcadenas, subsecuencias

$y \in A^*$ es un **prefijo** de $x \in A^*$ si (def) $\exists z \in A^* \ / \ x = y \cdot z$

$y \in A^*$ es un **sufijo** de $x \in A^*$ si (def) $\exists z \in A^* \ / \ x = z \cdot y$

$y \in A^*$ es una **subcadena** de $x \in A^*$ si (def) $\exists z, w \in A^* \ / \ x = z \cdot y \cdot w$

$y \in A^*$ es una **subsecuencia** de $x \in A^*$ si (def) y puede ser obtenida borrando de x cualquier cantidad de sus símbolos

Ejemplo: $aaba$

prefijos: $\{\varepsilon, a, aa, aab, aaba\}$

subcadenas: $\{\varepsilon, a(\text{prefijo}), a(\text{posición } 2), b, a(\text{posición } 4), aa(\text{prefijo}), ab, ba, aab(\text{prefijo}), aba, aaba(\text{prefijo})\}$

subsecuencias: además de todas las subcadenas: $\{ab(\text{posiciones } 1{,}3), aa(\text{posiciones } 1{,}4), aa(\text{posiciones } 2{,}4), aaa, aba(\text{posiciones } 1{,}3{,}4)\}$

Slide 4

Otras operaciones con cadenas

Potencia $x^n := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } n = 0 \\ x^{n-1} \cdot x & \text{si } n > 0 \end{cases}$

Reflexión $x^R := \begin{cases} \varepsilon & \text{si } x = \varepsilon \\ a \cdot y^R & \text{si } x = y \cdot a \text{ con } y \in A^* \wedge a \in A \end{cases}$

Propiedades:

$|x^n| = n|x|$

${x^R}^R = x$

$(x \cdot y)^R = y^R \cdot x^R$

Palíndromo: $x = x^R$

Slide 5

Operaciones con lenguajes I

$\cup$ unión: asociativa, conmutativa, idempotente,
elemento neutro ($\emptyset$), elemento anulador (A^*)

$\cap$ intersección: asociativa, conmutativa, idempotente
elemento neutro (A^*), elemento anulador ($\emptyset$)

$\overline{\ }$ complementación: $\overline{\overline{L}} = L$, $\overline{\emptyset} = A^*$

Propiedades de distribución:

$$L_1 \cup (L_2 \cap L_3) = (L_1 \cup L_2) \cap (L_1 \cup L_3)$$

$$L_1 \cap (L_2 \cup L_3) = L_1 \cap L_2 \cup L_1 \cap L_3$$

Leyes de De Morgan:

$$\overline{L_1 \cup L_2} = \overline{L_1} \cap \overline{L_2}$$

$$\overline{L_1 \cap L_2} = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$$

Slide 6

Operaciones con lenguajes II

$\cdot$ (concatenación):

$$L_1 \cdot L_2 := \{x \cdot y \ / \ x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$$

asociativa, no conmutativa, no cumple leyes de cancelación,
elemento neutro ($\{\varepsilon\}$), elemento anulador ($\emptyset$)

Se considera con más precedencia que la intersección.

Propiedades de distribución:

$$L_1 \cdot (L_2 \cup L_3) = (L_1 \cdot L_2) \cup (L_1 \cdot L_3)$$

$$(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$$

No lo cumple respecto a la intersección

Slide 7

Operaciones con lenguajes III

- Diferencia $L_1 - L_2 := L_1 \cap \overline{L_2}$

$\triangle$ Diferencia simétrica $L_1 \triangle L_2 := L_1 - L_2 \cup L_2 - L_1$

Potencia $L^n := \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L^{n-1} \cdot L & \text{si } n > 0 \end{cases}$

Reflexión $L^R := \{x^R \;/\; x \in L\}$

Algunas propiedades:

$\emptyset^0 := \{\varepsilon\} \quad \emptyset^n = \emptyset$ si $n > 0 \qquad \{\varepsilon\}^n = \{\varepsilon\} \;\; \forall n$

$L^{R^R} = L$

$(L_1 \cdot L_2)^R = L_2^R \cdot L_1^R$

$(L_1 \cup L_2)^R = L_1^R \cup L_2^R$

$(L_1 \cap L_2)^R = L_1^R \cap L_2^R$

$\ldots$

Slide 8

Operaciones con lenguajes IV

* Cierre de Kleene

$$L^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \cup \ldots \cup L^n \cup \ldots$$

$^+$ Cierre positivo

$$L^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n = L \cup L^2 \cup \ldots \cup L^n \cup \ldots$$

Se consideran con mayor precedencia que la concatenación.

Algunas propiedades:

$\emptyset^* = \{\varepsilon\} \quad \{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\} \quad \emptyset^+ = \emptyset \quad \{\varepsilon\}^+ = \{\varepsilon\}$

$L^+ = L^* \cdot L = L \cdot L^*$

$L^{**} = L^*$

$\ldots$

Slide 9

Ejemplos de alfabetos

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{U} & = & \{|\} \\
\mathbb{B} & = & \{0,1\} \\
A_2 & = & \{a,b\} \\
A_3 & = & \{a,b,c\} \\
E_3 & = & \{a_1,a_2,a_3\} \\
A_{min} & = & \{a,b,c,\ldots z\} \\
\mathbb{D} & = & \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\
C & = & \{azul, amarillo, rojo\} \\
DRAE & = & \text{palabras del DRAE, edición de 2000}
\end{array}$$

Slide 10

Ejemplos de lenguajes

Sobre el alfabeto $\mathbb{B}$

$$\begin{array}{rcl}
L_0 & = & \{\} = \emptyset \\
L_1 & = & \{\varepsilon\} \\
L_2 & = & \{0\} \\
L_3 & = & \{0,1\} \simeq \mathbb{B} \\
L_4 & = & \{0,00,01\} \\
L_5 & = & \{\varepsilon,0,00\} \\
L_6 & = & \{0^n \ / \ n \geq 0\} = L_2^* = L_5^* = L_5^+ \\
L_7 & = & \{0^n \ / \ n \geq 1\} = L_2^+ = L_2 \cdot L_6 \\
L_8 & = & \mathbb{B}^* = L_3^* \\
L_9 & = & \{x0 \ / \ x \in \mathbb{B}^*\} = \mathbb{B}^* \cdot L_2 = \text{números pares} \\
L_{10} & = & \{1x0 \ / \ x \in \mathbb{B}^*\} \cup \{0\} = \text{números pares sin ceros sobrantes}
\end{array}$$

Slide 11

Expresiones regulares

$\emptyset$ representará al lenguaje vacío $\{\} = \emptyset$

ϵ representará al lenguaje $\{\epsilon\}$ y $\forall a \in A$, a al lenguaje $\{a\}$

Si α y β son expresiones regulares que representan respectivamente a los lenguajes L_α y L_β , entonces

(α) representará (también) a L_α

$(\alpha)|(\beta)$ ó $(\alpha) + (\beta)$ representará a $L_\alpha \cup L_\beta$

$(\alpha) \cdot (\beta)$ ó $(\alpha)(\beta)$ representará a $L_\alpha \cdot L_\beta$

$(\alpha)^*$ representará a L_α^*

Convenio: se considera que la operación de cierre tiene más prioridad (precedencia) que la concatenación, y ésta más que la unión, y en los tres casos asociación por la izquierda.

$((((\alpha)|((\beta) \cdot (\gamma)))^*) \cdot ((\alpha)^*)) \cdot (\beta)$ se escribirá $(\alpha \mid \beta\gamma)^*\alpha^*\beta$

Slide 12

Propiedades de las expresiones regulares

Si α, β son expresiones regulares, diremos que α y β son **equivalentes** $(\alpha = \beta)$ si (def) representan al mismo lenguaje.

Si α, β y γ son expresiones regulares:

1. $\alpha|\emptyset = \alpha$
2. $\alpha|\alpha = \alpha$
3. $\alpha|\beta = \beta|\alpha$
4. $(\alpha|\beta)|\gamma = \alpha|(\beta|\gamma)$
5. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
6. $\alpha\epsilon = \epsilon\alpha = \alpha$
7. $(\alpha|\beta)\gamma = \alpha\gamma|\beta\gamma$
8. $\gamma(\alpha|\beta) = \gamma\alpha|\gamma\beta$
9. $\alpha^*\alpha^* = \alpha^*$

Slide 13

10. $(\alpha^*)^* = \alpha^*$
11. $\alpha\alpha^* = \alpha^*\alpha$
12. $\alpha^* = \epsilon|\alpha|\alpha^2|\ldots|\alpha^k|\alpha^{k+1}\alpha^* \quad \forall k \geq 0$
13. $\alpha^* = \epsilon|\alpha\alpha^*$
14. $(\alpha^*|\beta^*)^* = (\alpha|\beta)^*$
15. $(\alpha^*\beta^*)^* = (\alpha|\beta)^*$
16. $(\alpha\beta)^*\alpha = \alpha(\beta\alpha)^*$
17. $(\alpha^*\beta)^*\alpha^* = (\alpha|\beta)^*$
18. $\alpha^*(\beta\alpha^*)^* = (\alpha|\beta)^*$
19. $(\alpha^*\beta)^* = (\alpha|\beta)^*\beta|\epsilon$
20. Si f es una función cualquiera que combina sus argumentos mediante los operadores | (unión), $\cdot$ (concatenación) y * (cierre), entonces $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \subseteq (\alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_n)^*$