Slide 1

Máquina secuencial de Mealy

$M = (\Sigma_E, \Sigma_S, Q, f, g)$ donde

$$\begin{aligned} \Sigma_E &: \text{ alfabeto } \textit{de entrada} \\ \Sigma_S &: \text{ alfabeto } \textit{de salida} \\ Q &: \text{ conjunto de } \textit{estados} \\ f &: Q \times \Sigma_E \to Q \textit{ función de transición} \\ g &: Q \times \Sigma_E \to \Sigma_S \textit{ función de salida} \end{aligned}$$

Si Q es finito, M se llama finito.

Si en t, M está en el estado $q \in Q$, y recibe la entrada $e \in \Sigma_E$, entonces emite $g(q,e)$, y en $t+1$ pasa al estado $f(q,e)$:

$$s(t) = g(q(t), e(t)) \qquad q(t+1) = f(q(t), e(t))$$

Slide 2

Máquina de Mealy. Representación

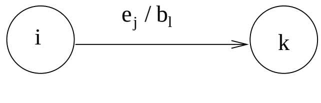
$Q \backslash \Sigma_E$	$\dots$	e_j	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
q_i	$\dots$	$f(q_i, e_j)/g(q_i, e_j)$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

entrada : e_j

estado : q_i $f(q_i, e_j)$

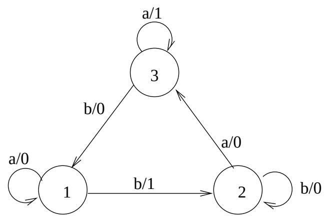
salida : $g(q_i, e_j)$

$f(q_i, e_j) = q_k$ $g(q_i, e_j) = b_l$



Slide 3

	a	b
q_1	$q_1/0$	$q_2/1$
q_2	$q_3/0$	$q_2/0$
q_3	$q_3/1$	$q_1/0$



$$f(q_1,a)=q_1 \quad f(q_1,b)=q_2 \quad f(q_2,a)=q_3$$

$$g(q_1,a)=0 \quad g(q_1,b)=1 \quad g(q_2,a)=0$$

Extensión a cadenas

$$(\underset{q_1}{|}aba,\varepsilon) \vdash (a\underset{q_1}{|}ba,0) \vdash (ab\underset{q_2}{|}a,01) \vdash (aba\underset{q_3}{|},010)$$

$$(\underset{q_2}{|}aba,\varepsilon) \vdash (a\underset{q_3}{|}ba,0) \vdash (ab\underset{q_1}{|}a,00) \vdash (aba\underset{q_1}{|},000)$$

Slide 4

Extensiones a cadenas

$$\begin{array}{ccccccccc} \underset{q}{|} & e_1 & \underset{q_1}{|} & e_2 & \underset{q_2}{|} & \cdots & \underset{q_{p-1}}{|} & e_p & \underset{q_p}{|} \\ & b_1 & & b_2 & & \cdots & & b_p & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcll} f^+ & : & Q \times \Sigma_E^+ \to Q & f^+(q,ax) := f^+(f(q,a),x) \\ g^+ & : & Q \times \Sigma_E^+ \to \Sigma_S & g^+(q,ax) := g^+(f(q,a),x) \\ g^{++} & : & Q \times \Sigma_E^+ \to \Sigma_S^+ & g^{++}(q,ax) := g(q,a)\cdot g^{++}(f(q,a),x) \end{array}$$

$$f^+(q,a) := f(q,a); \qquad g^+(q,a) := g(q,a); \qquad g^{++}(q,a) := g(q,a)$$

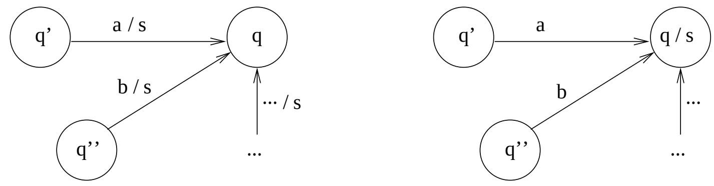
Propiedades:

1. $|g^{++}(q,x)| = |x| \quad \forall x \in \Sigma_E^+$
2. $f^+(q,xy) = f^+(f^+(q,x),y) \quad \forall x,y \in \Sigma_E^+$
3. $g^{++}(q,xy) = g^{++}(q,x)\cdot g^{++}(f^+(q,x),y) \quad \forall x,y \in \Sigma_E^+$

Slide 5

Máquina secuencial de Moore

f(q’, a) = f(q’’, b) = q $\Longrightarrow$ g(q’, a) = g(q’’, b) = s   h(q’’) := g(q, a) = g(q’, b)



Mealy   Moore

$$\begin{array}{lllll} h & : & Im(f) \subseteq Q & \longrightarrow & \Sigma_S \\ & & q & & h(q) := g(q', e)\ /\ f(q', e) = q \end{array}$$

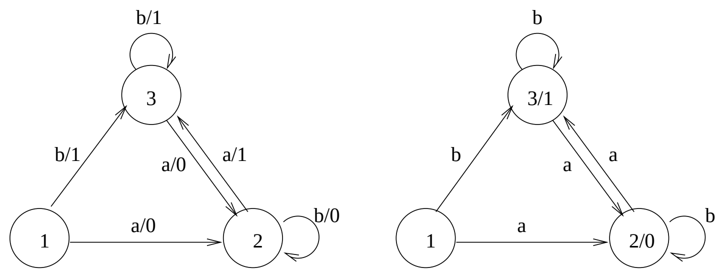
Propiedades: $h(q) = g(f^{-1}(q))$ $h(f(q', e)) = g(q', e)$

$$\underset{q}{|}\, e_1 \underset{q_1}{|}\, e_2 \underset{q_2}{|} \cdots \underset{q_{p-1}}{|}\, e_p \underset{q_p}{|}$$

$$h(q_1)\, h(q_2)\ \cdots\ h(q_p)$$

Slide 6

Máquina secuencial de Moore. Representación



	a	b
q_1	$q_2/0$	$q_3/1$
q_2	$q_3/1$	$q_2/0$
q_3	$q_2/0$	$q_3/1$

	a	b
q_1	q_2	q_3
$q_2/0$	q_3	q_2
$q_3/1$	q_2	q_3

Slide 7

Máquina secuencial de Moore. Extensión a cadenas

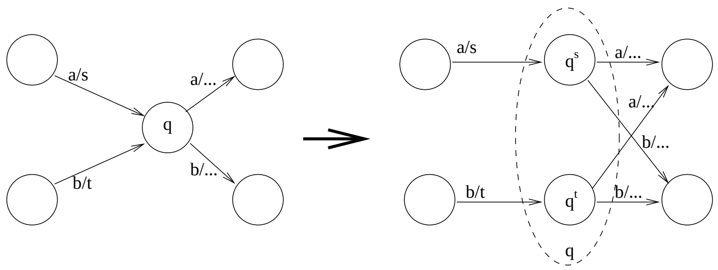
$$f^*(q,\varepsilon) := q \qquad g^*(q,\varepsilon) := g^{**}(q,\varepsilon) := h(q)$$

$$\begin{array}{lcll} f^* & : & Q \times \Sigma_E^* \to Q & f^*(q,ax) := f^+(q,ax) \\ g^* & : & Q \times \Sigma_E^* \to \Sigma_S & g^*(q,ax) := g^+(q,ax) \\ g^{**} & : & Q \times \Sigma_E^* \to \Sigma_S^* & g^{**}(q,ax) := g^{++}(q,ax) \end{array}$$

$$f^*(q,xy) = f^*(f^*(q,x),y) \quad \forall x,y \in \Sigma_E^*$$

Slide 8

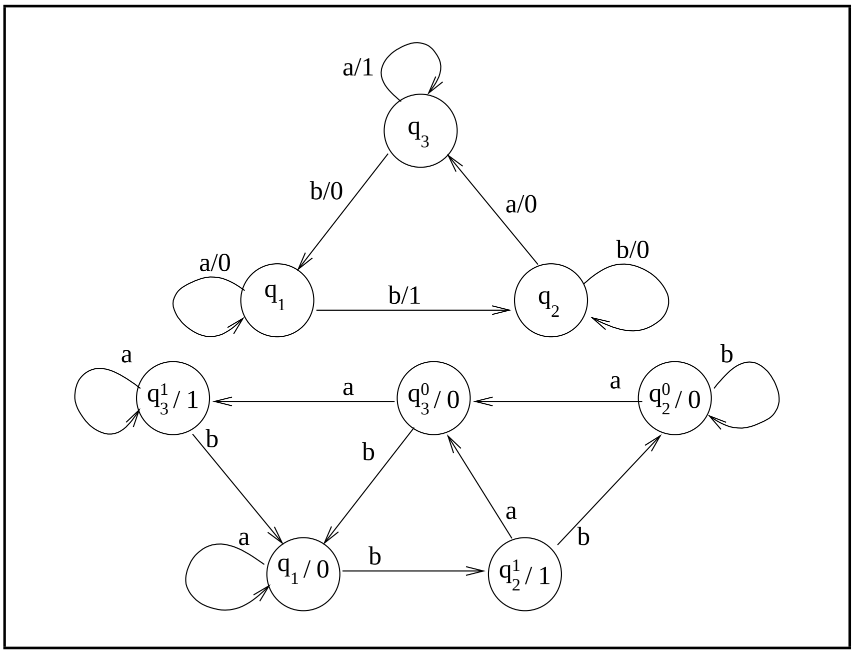
Mealy - Moore



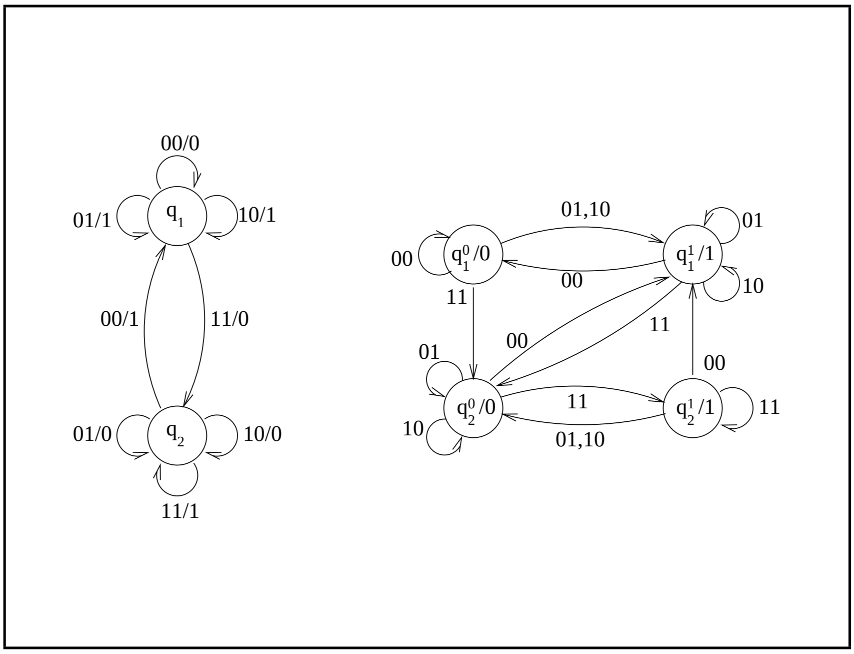
$$\begin{array}{ll} \hat{Q} := & \{(q,s) \in (Q \times \Sigma_S) \ / \\ & \qquad \exists (q',e) \in Q \times \Sigma_E \ / \ f(q',e) = q \wedge g(q',e) = s\} \\ & \cup \{(q,\cdot) \ / \\ & \qquad \nexists (q',e) \in Q \times \Sigma_E \ / \ f(q',e) = q \wedge g(q',e) = s\} \end{array}$$

$$\hat{f}(q^s,e) := f(q,e)^{g(q,e)} \qquad \hat{g}(q^s,e) := g(q,e)$$

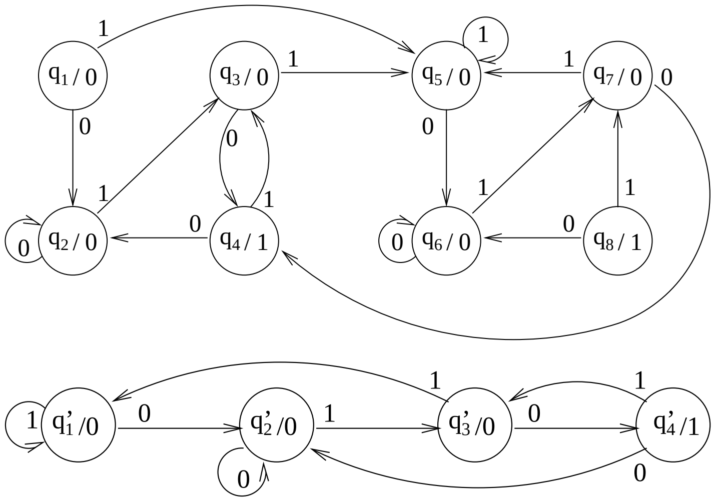
Slide 9



Slide 10



Slide 11



Slide 12

Comportamiento entrada-salida

$$\begin{array}{rccc} C_q : & \Sigma_E^* & \longrightarrow & S \\ & x & & g(q,x) \end{array}$$

	ε	0	1	00	01	10	11	000	001	010	011	100	$\cdots$
C_{q_1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\cdots$
C_{q_2}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	$\cdots$
C_{q_3}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\cdots$
C_{q_4}	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	$\cdots$
C_{q_5}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\cdots$
$\cdots$													
$C_{q'_1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\cdots$
$C_{q'_2}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	$\cdots$
$\cdots$													

Slide 13

Equivalencia

$$M_1 = (\Sigma_E, \Sigma_S, Q_1, f_1, g_1) \quad M_2 = (\Sigma_E, \Sigma_S, Q_2, f_2, g_2)$$

$$q_1 \in Q_1 \qquad\qquad q_2 \in Q_2$$

$q_1 \simeq q_2$ (equivalentes) sii (def.) $C_{q_1} \equiv C_{q_2}$

$M_1 \simeq M_2$ sii (def.) $\{C_{q_1} \,/\, q_1 \in Q_1\} = \{C_{q_2} \,/\, q_2 \in Q_2\}$

Autómata en forma mínima (observable)

$$q, q' \in Q \quad (C_q \equiv C_{q'}) \Rightarrow (q = q')$$

Accesibilidad

q' es accesible desde q sii (def.) $\exists x \in \Sigma_E^* \,/\, f(q, x) = q'$

Slide 14

Comportamiento entrada-estados

$$\begin{array}{llllll} k: & \Sigma_E & \rightarrow & Q^Q & & \\ & e & & k(e): & Q & \rightarrow Q \\ & & & & q & \quad k(e)(q) = f(q, e) \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} K: & <\Sigma_E^*, \cdot> & \rightarrow & <Q^Q, \circ> \\ & e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_p & \rightarrow & k(e_1) \circ k(e_2) \circ \ldots \circ k(e_p) \end{array}$$

(Homomorfismo entre monoides)

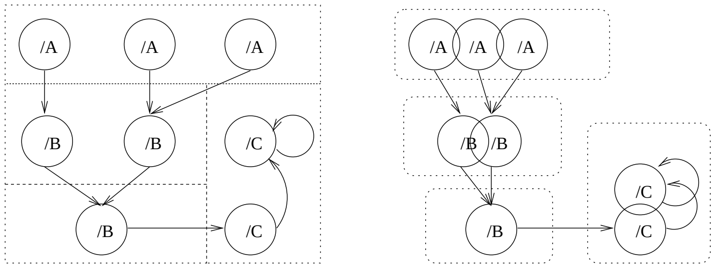
Relación equirrespuesta

$x \simeq y$ sii (def.) $K(x) = K(y)$

Slide 15

Minimización de máquinas de Moore

$$q \simeq q' \Leftrightarrow \forall x \in \Sigma_E^* \; g(q,x) = g(q',x)$$



$q \simeq q' \Rightarrow h(q) = h(q')$ $\quad (h(q) = g(q, \varepsilon))$

$q \simeq q' \Rightarrow \forall a \in \Sigma_E \; f(q,a) \simeq f(q',a)$ $\quad (g(f(q,a),x) = g(q,ax))$

Slide 16

Minimización de máquinas de Moore

$$M_m = (\Sigma_E, \Sigma_S, Q/\simeq, \hat{f}, \hat{g})$$

$$\begin{array}{lcl} \hat{f}([q],a) & := & [f(q,a)] \\ \hat{g}([q],a) & := & g(q,a) \\ (\hat{h}([q]) & := & h(q)\,) \end{array}$$

1. M_m es una máquina de Moore ($\hat{f}$ y $\hat{g}$ están bien definidas)
2. M_m es equivalente a M ($q \simeq [q]$)
3. M_m es mínimo (observable: $[q] \simeq [q'] \Rightarrow [q] = [q']$)
4. Cualquier M' equivalente a M tiene el mismo número de estados o más que M_m
5. Cualquier M'' equivalente a M y con el número de estados de M_m es isomorfo a M_m (M_m es único)

Slide 17

Algoritmo de minimización: justificación

$$q \simeq q' \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \Sigma_E^* \;\; g(q,x) = g(q',x)$$

$k \geq 0:$

$$q \simeq_k q' \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \Sigma_E^* \;\; |x| \leq k \Rightarrow g(q,x) = g(q',x)$$

P0 $q \simeq q' \;\Leftrightarrow\; \forall k \geq 0 \;\; q \simeq_k q'$

P1 $q \simeq_0 q' \;\Leftrightarrow\; h(q) = h(q')$

P2 $[q]_0 = \{q' \in Q \,/\, h(q') = h(q)\} \qquad \#Q/\simeq_0 = \#Im(h)$

P3 $k > 0: \;\; q \simeq_k q' \;\Rightarrow\; q \simeq_{k-1} q'$

P4 $k > 0: \;\; [q]_k \subseteq [q]_{k-1}$

Slide 18

Algoritmo de minimización: justificación

P5 $k > 0: \;\; q \simeq_k q' \;\Rightarrow\; \forall a \in \Sigma_E \;\; f(q,a) \simeq_{k-1} f(q',a)$

P6 $k > 0: \;\; q \simeq_k q' \Leftrightarrow \begin{cases} q \simeq_{k-1} q' \\ \forall a \in \Sigma_E \;\; f(q,a) \simeq_{k-1} f(q',a) \end{cases}$

P7 $\forall q \in Q \;\; [q]_k = [q]_{k+1} \;\Rightarrow \forall q \in Q \;\; [q]_{k+1} = [q]_{k+2}$

P8 Sea $\mathcal{P}_k = Q/{\simeq_k}$.
$\exists k \geq 0 \,/\, \mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{k+1} \;\Rightarrow \forall m \geq 0 \;\; \mathcal{P}_k = \mathcal{P}_{k+m}$

P9 La familia $\{\mathcal{P}_k\}_{k=0}^{\infty}$ es finita e igual a $\{\mathcal{P}_k\}_{k=0}^{k_0}$ con $k_0 < n = \#Q$

Corolario $Q/\simeq \;=\; Q/\simeq_{n-1}$

Corolario $q \simeq q' \;\Leftrightarrow\; \forall x \in \Sigma_E^*$ con $|x| < n \;\; g(q,x) = g(q',x)$

Slide 19

Algoritmo de minimización

0 Construir $\mathcal{P}_0$ agrupando estados según las salidas. $k := 0$

1 Construir $\mathcal{P}_{k+1}$ a partir de $\mathcal{P}_k$,
manteniendo en la misma clase dos estados q y q', si y sólo si,
para toda entrada a,
los estados siguientes, $f(q,a)$ y $f(q',a)$, están juntos en $\mathcal{P}_k$

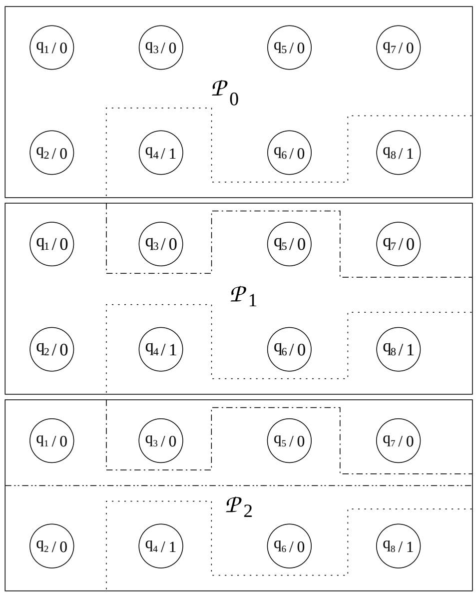
2 Si $\mathcal{P}_{k+1} \neq \mathcal{P}_k$ entonces hacer $k := k+1$ y volver a 1

El proceso termina (con $k < n$)

- Los estados de la máquina mínima son las clases obtenidas.
- A cada estado se asocia la salida de un representante.
- Los arcos se trazan, con cada entrada a, desde cada nuevo estado, representado por q, al estado que represente al estado siguiente de la máquina original $f(q,a)$.

Slide 20

	0	1
1/ 0	2	5
2/ 0	2	3
3/ 0	4	5
4/ 1	2	3
5/ 0	6	5
6/ 0	6	7
7/ 0	4	5
8/ 1	6	7



	0	1
1/ 0	2	1
2/ 0	2	3
3/ 0	4	1
4/ 1	2	3