Slide 1

Reconocedor finito determinista

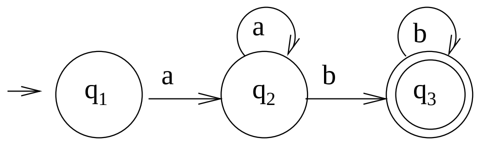
$M = (\Sigma_E, Q, q_1, f, F)$ donde

$$
\begin{array}{rcl}
\Sigma_E & : & \text{alfabeto } \textit{de entrada} \\
Q & : & \text{conjunto de } \textit{estados, finito} \\
q_1 \in Q & : & \text{estado } \textit{inicial} \\
f & : & Q \times \Sigma_E \to Q \text{ función } \textit{parcial} \text{ de transición} \\
F \subseteq Q & : & \text{estados } \textit{finales} \text{ o } \textit{de aceptación}
\end{array}
$$

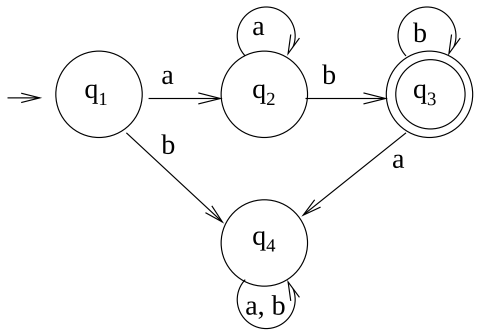
f se amplía a una función *total* añadiendo un estado *sumidero* q_Ω, imagen de cualquier par en el que f no esté definida, con $f(q_\Omega, a) := q_\Omega \ \forall a \in \Sigma_E$

RFD = Moore con $\Sigma_S = \{0, 1\}$, fijando un estado inicial q_1

Slide 2



	a	b
→ q_1	q_2	
q_2	q_2	q_3
(q_3)		q_3



	a	b
→ q_1	q_2	q_4
q_2	q_2	q_3
(q_3)	q_4	q_3
q_4	q_4	q_4

Slide 3

LENGUAJE RECONOCIDO POR UN RFD

$$L(R) = \{x \in \Sigma_E^* \,/\, f(q_1, x) \in F\}$$

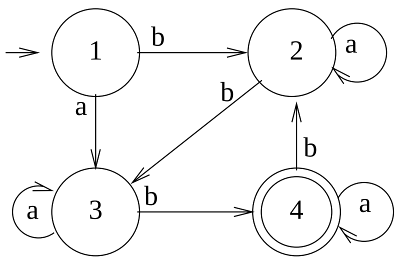
PARA EL TEOREMA DE ANÁLISIS

$$Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$$

$i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} R^0_{ij} &:= \{a \in \Sigma_E \,/\, f(q_i, a) = q_j\} \text{ si } i \neq j \\ R^0_{ii} &:= \{a \in \Sigma_E \,/\, f(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} \\ R^k_{ij} &:= \left\{x \in \Sigma_E^* \,/\, \begin{array}{l} f(q_i, x) = q_j \\ \wedge \\ y \text{ prefijo propio de } x \Rightarrow f(q_i, y) \in \{q_1, \ldots, q_k\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Slide 4



	a	b
$\rightarrow 1$	3	2
2	2	3
3	3	4
(4)	4	2

$R^0_{11} = \varepsilon$, $R^0_{22} = \varepsilon | a$,
$R^0_{12} = b$, $R^0_{14} = \emptyset$,
$R^1_{12} = b$, $R^2_{12} = ba^*$,
$R^1_{23} = R^0_{23} = b$, $R^2_{23} = a^*b$, $R^3_{23} = a^*ba^*$

$R^4_{14} = ?$

$$R^k_{ij} = R^{k-1}_{ij} \cup R^{k-1}_{ik} (R^{k-1}_{kk})^* R^{k-1}_{kj}$$

Slide 5

Teorema de análisis

- $L(R) = \bigcup_{q_f \in F} R^n_{1f}$
- R^0_{ij} es regular, $\forall i, j$
- si $k > 0$:

$$R^k_{ij} = R^{k-1}_{ij} \cup R^{k-1}_{ik}(R^{k-1}_{kk})^* R^{k-1}_{kj}$$

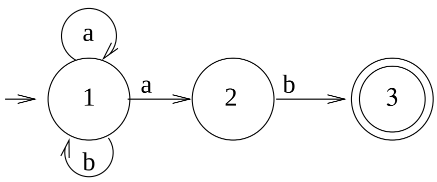
- R^k_{ij} es regular, $\forall i, j, k$
- Conclusión: $L(R)$ es regular y se puede calcular “su” expresión regular algorítmicamente

“su” :

- una de las expresiones que lo representan
- dependiente de la numeración de los estados

Slide 6

Reconocedor finito no determinista

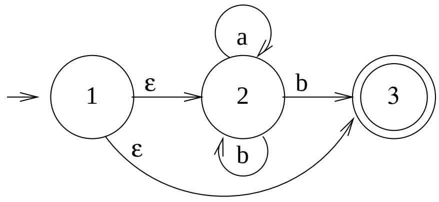


Acepta bab	
$\vert_1\, b \vert_1\, a \vert_1\, b \vert_1$	$\times$
$\vert_1\, b \vert_1\, a \vert_2\, b \vert_3$	$\surd$

No acepta $abaa$	
$\vert_1\, a \vert_1\, b \vert_1\, a \vert_1\, a \vert_1$	$\times$
$\vert_1\, a \vert_1\, b \vert_1\, a \vert_1\, a \vert_2$	$\times$
$\vert_1\, a \vert_1\, b \vert_1\, a \vert_2\, a$	$\times$
$\vert_1\, a \vert_2\, b \vert_3\, aa$	$\times$

Slide 7

Reconocedor finito no determinista



Acepta			No acepta ba	
ab	$\mid_1 \mid_2 a \mid_2 b \mid_3$	$\surd$	$\mid_1 \mid_2 b \mid_2 a \mid_2$	$\times$
abb	$\mid_1 \mid_2 a \mid_2 b \mid_2 b \mid_3$	$\surd$	$\mid_1 \mid_2 b \mid_3 a$	$\times$
ε	$\mid_1 \mid_3$	$\surd$	$\mid_1 \mid_3 ba$	$\times$

Slide 8

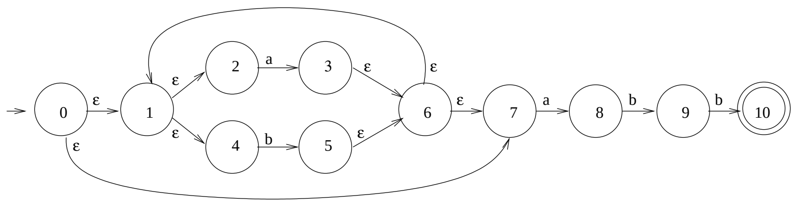
Reconocedor finito no determinista

$$f : Q \times (\Sigma_E \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$$

$$\begin{array}{rlll} a = \varepsilon^n a \varepsilon^m : & f^*(q,a) & := & f(q,a) \\ & & & \cup f(f(q,\varepsilon),a) \cup f(f(f(q,\varepsilon),\varepsilon),a) \ldots \\ & & & \cup f(f(q,a),\varepsilon) \cup f(f(f(q,a),\varepsilon),\varepsilon) \ldots \\ & f^*(q,ax) & := & \bigcup_{q' \in f^*(q,a)} f^*(q',x) \end{array}$$

Slide 9

Determinación



$cerr\varepsilon(3) = \{3,6,7,1,2,4\}$ $\quad cerr\varepsilon(8) = \{8\}$
$cerr\varepsilon(0) = \{0,1,2,4,7\}$

$cerr\varepsilon(3,8) = \{3,6,7,1,2,4,8\}$

$0 \rightarrow \{0,1,2,4,7\} \xrightarrow{a} \{3,8\} \rightarrow \{1,2,3,4,6,7,8\}$

Slide 10

Determinación

$$RFN = (\Sigma_E, Q, q_1, f, F) \;\simeq\; RFD := (\Sigma_E, \mathcal{P}(Q), cerr\varepsilon(q_1), \hat{f}, \hat{F})$$

$$T \rightarrow cerr\varepsilon(T) = T' \xrightarrow{a} f(T', a) = U \rightarrow cerr\varepsilon(U):$$
$$\hat{f}(T, a) := cerr\varepsilon(f(cerr\varepsilon(T), a))$$

$$T \in \hat{F} \Leftrightarrow T \cap F \neq \emptyset$$

Algoritmo (estados accesibles desde el inicial)

$\hat{q}_1 := cerr\varepsilon(q_1);\quad \hat{Q} := \{\hat{q}_1\}$
mientras haya un estado T no marcado en $\hat{Q}$ **hacer**
    marcar T
    para cada símbolo $a \in \Sigma_E$ **hacer**
        $U := cerr\varepsilon(f(T, a))$
        si $U \notin \hat{Q}$ **entonces** añadir U a $\hat{Q}$
        definir $\hat{f}(T, a) := U$

Slide 11

	a	b	ε
$\rightarrow 0$			$1, 7$
1			$2, 4$
2	3		
3			6
4		5	
5			6
6			$1, 7$
7	8		
8		9	
9		10	
(10)			

	a	b	
$\rightarrow A$	B	C	$\underline{0}, 1, 2, 4, 7$
B	B	D	$1, 2, \underline{3}, 4, 6, 7, \underline{8}$
C	B	C	$1, 2, 4, \underline{5}, 6, 7$
D	B	E	$1, 2, 4, \underline{5}, 6, 7, \underline{9}$
(E)	B	C	$1, 2, 4, \underline{5}, 6, 7, (\underline{10})$

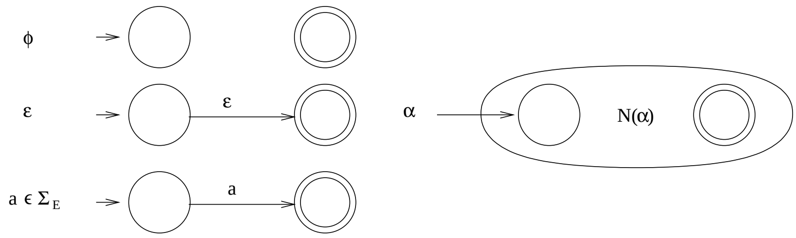
Slide 12

	a	b
$\rightarrow (1)$	$2, 3$	
2	1	
3	4	4
(4)	5	
5	4	

	a	b	
(A)	B	C	(1)
B	D	E	$2, 3$
C	C	C	
(D)	F	C	$(1), (4)$
(E)	G	C	(4)
F	D	E	$2, 3, 5$
G	E	C	5

Slide 13

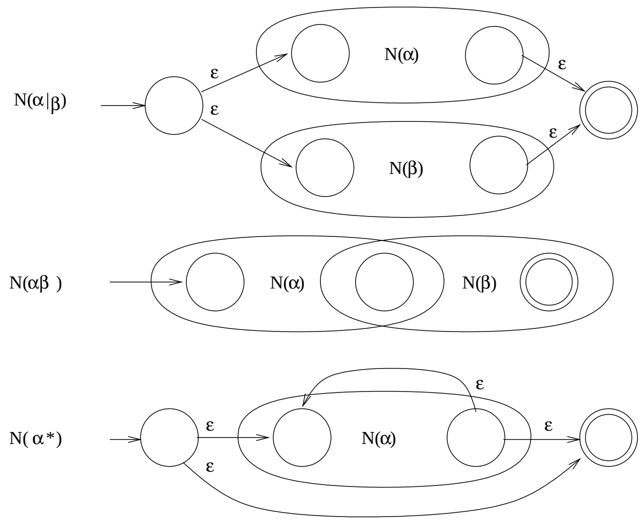
Construcción de Thompson (I)



- un sólo estado final
- del final no salen arcos
- al inicial no llegan arcos

Slide 14

Construcción de Thompson (II)



Slide 15

TEOREMA DE SÍNTESIS

Dado un lenguaje regular L, existe un RFD, R, tal que $L(R) = L$

$$\text{exp. regular} \xrightarrow{\text{Thompson}} \text{R.F. no D.} \xrightarrow{\text{Determinación}} \text{R.F.D.}$$

Análisis + Síntesis =

Lenguajes	Descripciones	Máquinas
regulares	expresiones regulares	RFD, RFN

Slide 16

REGULARIDAD

$L_1, L_2 \subseteq \Sigma_E^*$, regulares

- Todo lenguaje finito es regular
- $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$ y L_1^* son regulares
- $\overline{L_1}$ es regular
- $L_1 \cap L_2$ es regular
- La unión **finita** de regulares es regular
- La intersección **finita** de regulares es regular
- La concatenación **finita** de regulares es regular
- L_1^R es regular

Slide 17

$$\{a^n b^n \,/\, n \geq 0\} \text{ NO ES REGULAR}$$

$$\text{regular} \Rightarrow \; \exists \text{ RFD} \qquad N = \#Q$$

$$\left.\begin{array}{ll} a & f(q_1, a) \\ a^2 & f(q_1, a^2) \\ \ldots & \\ a^N & f(q_1, a^N) \\ a^{N+1} & f(q_1, a^{N+1}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} N+1 \text{ líneas} \\ N \text{ estados} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{principio} \\ \Longrightarrow \\ \text{del} \\ \text{palomar} \end{array} \quad \begin{array}{l} \exists\, i, j \\ 1 \leq i < j \leq N+1 \\ f(q_1, a^i) = f(q_1, a^j) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} f(q_1, a^i b^i) \in F : & f(q_1, a^i b^i) & = f(f(q_1, a^i), b^i) \\ f(q_1, a^j b^i) \notin F : & & = f(f(q_1, a^j), b^i) = f(q_1, a^j b^i) \end{array}$$

absurdo: no puede existir tal RFD

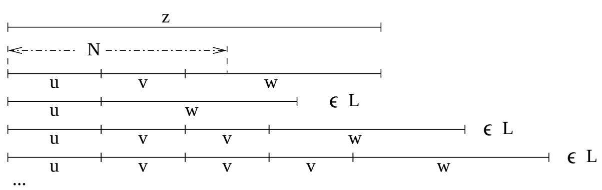
Slide 18

LEMA DE BOMBEO

Todo lenguaje regular verifica el lema de bombeo lr :

$\exists\, N > 0 /$

$$(z \in L \wedge |z| \geq N) \Rightarrow \exists\, u, v, w \in \Sigma_E^* \,/ \left\{ \begin{array}{l} z = uvw \\ |v| > 0 \\ \forall\, i \geq 0\, , uv^i w \in L \\ (|uv| \leq N) \end{array} \right.$$



Slide 19

Lema de bombeo: demostración

L es regular. Sea R un RFD para él. $N := \#Q$

Sea z una cadena de L con $|z| >= N$: $z = a_1 a_2 \dots a_N a_{N+1} \dots a_m$

$$\left.\begin{array}{l} f(q_1, \varepsilon) = q_1 \\ f(q_1, a_1) \\ f(q_1, a_1 a_2) \\ \dots \\ f(q_1, a_1 \dots a_N) \end{array}\right\} \begin{array}{l} N+1 \text{ líneas} \\ N \text{ estados} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{principio} \\ \Longrightarrow \\ \text{del} \\ \text{palomar} \end{array} \quad \begin{array}{l} \exists\, i, j \\ 0 \le i < j \le N \\ f(q_1, a_1 \dots a_i) = \\ = f(q_1, a_1 \dots a_j) \\ = q \end{array}$$

$(a_1 a_0 = \varepsilon)$

Entonces, con $v := a_{i+1} \dots a_j$ se tiene todo:

$$\underset{q_1}{|}\overbrace{a_1 \dots a_i}^{u}\ \underset{q}{|}\overbrace{a_{i+1} \dots a_j}^{v}\ \underset{q}{|}\overbrace{a_{j+1} \dots a_m}^{w}\ \underset{\in F}{|}$$

Slide 20

$\{a^n b^n \,/\, n \ge 0\}$ no cumple el lema de bombeo *lr*
(luego no es regular)

Fuera cual fuera $N > 0$, $z = a^N b^N$ está en L y $|a^N b^N| = 2N \ge N$

pero **ninguna** subcadena no nula v de z es bombeable en L:

- si $v = a^p$ con $p > 0$, deberá ser $u = a^q$ y $w = a^{N-p-q} b^N$,
  y uw debería estar en L; pero no lo está porque
  $uw = a^q a^{N-p-q} b^N = a^{N-p} b^N$ y $N - p \neq N$
- si $v = b^p$ con $p > 0$, deberá ser $u = a^N b^q$ y $w = b^{N-p-q}$,
  y uw debería estar en L; pero no lo está porque
  $uw = a^N b^q b^{N-p-q} = a^N b^{N-p}$ y $N - p \neq N$
- si $v = a^p b^q$ con $p + q > 0$, deberá ser $u = a^{N-p}$ y $w = b^{N-q}$,
  y $uvvw$ debería estar en L; pero no lo está porque
  $uvvw = a^{N-p} a^p b^q a^p b^q b^{N-q} = a^N b^q a^p b^N$ con $p > 0$ o $q > 0$

Slide 21

Lema de bombeo: ejemplos

- $a|ba$ cumple el lema de bombeo (debe cumplirlo): $N = 4, 3$
- Todo lenguaje finito cumple el lema de bombeo (debe).
- aa^* cumple el lema de bombeo (debe): $N = 3, 2$
- ba^*b cumple el lema de bombeo (debe): $N = 4, 3$
- $ba^*b \,|\, aa*$ cumple el lema de bombeo (debe): $N = 3$
- $ba^*b \,|\, bb*$ cumple el lema de bombeo (debe): $N = 2$
- $ba^*b - \{ba^7b\}$ cumple el lema de bombeo (debe): $N = 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4$

Slide 22

$\{a^n b^m \,/\, n \neq m\}$ cumple el lema de bombeo lr (aunque no es regular)

$N = 2$

Cualquier z cadena de L de longitud mayor o igual que 2 es

- $z = a^{2+p}$ con $p \geq 0$; existe una subcadena bombeable: $v = a$ $(uv^iw = a^{2+p-1+i}$ con $i \geq 0 \Rightarrow 2 + p - 1 + i \geq 1)$
- $z = b^{2+q}$ con $q \geq 0$; existe una subcadena bombeable: $v = b$ $(uv^iw = b^{2+q-1+i}$ con $i \geq 0 \Rightarrow 2 + q - 1 + i \geq 1)$
- $z = a^p b^q$ con $p \neq q$ ambos no nulos; existe una subcadena bombeable:
  - si $p > q > 0$, $v = a^p$, ya que $uv^iw = a^{pi}b^q$ y no es posible que $pi = q$ para ningún $i \geq 0$
  - si $q > p > 0$, $v = b^q$, ya que $uv^iw = a^p b^{qi}$ y no es posible que $p = qi$ para ningún $i \geq 0$

Slide 23

DOS LENGUAJES NO REGULARES

- $\{a^{i^2} \,/\, i \geq 0\}$ no es regular.

  Demostración: no cumple el lema de bombeo:
  $N \quad z = a^{N^2} \in L \quad |z| = N^2 > N$
  subcadena bombeable: $v = a^p \quad p > 0 \quad p \leq N$ (versión fuerte)
  $uv^2w \in L \quad uv^2w = a^{N^2+p}$
  $N^2 < N^2 + p \leq N^2 + N < N^2 + 2^N + 1 = (N+1)^2$
  ¿cómo podría $N^2 + p$ ser cuadrado perfecto?

- $\{x \in (a|b)^* \,/\, |x|_a = |x|_b\}$ no es regular.

  Demostración: si lo fuera,
  $L \cap a^*b^*$ también lo sería;
  pero $L \cap a^*b^* = \{a^n b^n \,/\, n \geq 0\}$, que se sabe que no lo es.

Slide 24

EJEMPLOS DE LENGUAJES NO REGULARES

- $\{a^n b a^n \,/\, n \geq 0\}$ $\qquad$ $\{a^n b^n c^n \,/\, n \geq 0\}$
- $\{ww^R \,/\, w \in (a|b)^*\}$ $\qquad$ $\{wcw^R \,/\, w \in (a|b)^*\}$
- $\{w \in (a|b)^* \,/\, w = w^R\}$ $\qquad$ $\{ww \,/\, w \in (a|b)^*\}$
- cadenas de paréntesis equilibrados

EJEMPLOS DE LENGUAJES REGULARES

- $\{w \in (0|1)^* \,/\, w$ es par (en binario) $\}$
- $\{w \in (0|1)^* \,/\, w$ es un múltiplo de 3 (en binario) $\}$
- múltiplos de 7 en decimal (sobre el alfabeto de los dígitos)
- $\{w \in (a|b|c)^* \,/\, w$ admite la subcadena $ba\}$
- $\{w \in (a|b|c)^* \,/\, w$ no admite la subcadena $ba\}$
- $\{wxw^R \,/\, w, x \in (a|b)^*\}$

Slide 25

Algoritmos de decisión (nivel regular)

R_1, R_2 reconocedores finitos; α_1, α_2 expresiones regulares

- ¿Son R_1 y R_2 equivalentes?
- ¿Son α_1 y α_2 equivalentes?
- ...

L_1, L_2 lenguajes regulares (expresiones regulares, RFD o RFN):

- ¿Es L_1 vacío?
- ¿Es $L_1 = \Sigma_E^*$?
- Dada $w \in \Sigma_E^*$, ¿$w \in L_1$?
- ¿Es L_1 finito?
- ¿Es $L_1 = L_2$?
- ¿Es $L_1 \cap L_2$ vacía?
- ...