



GRAMÁTICAS y LENGUAJES INDEPENDIENTES DEL CONTEXTO

1. Convertir la siguiente gramática en una forma normal de Chomsky:

$S \rightarrow aAb \mid cHB \mid CH$
 $A \rightarrow dBH \mid eeC \mid C \mid \lambda$
 $B \rightarrow ff \mid D$
 $C \rightarrow gFB \mid ah$
 $D \rightarrow i$
 $E \rightarrow jF$
 $F \rightarrow dcGGG \mid cF$
 $G \rightarrow kF$
 $H \rightarrow Hln$

Notación: las letras minúsculas representan símbolos terminales, mientras que las mayúsculas son símbolos auxiliares. El símbolo inicial es, como viene siendo habitual, S. (febrero 1996)

2. Dada la gramática independiente de contexto $G: \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow Rc \\ R \rightarrow aRbR \mid \lambda \end{array} \right\}$ probar que, las cadenas w que genera, cumplen simultáneamente:

a) $w = xc \quad / \quad x \in (a/b)^*$

b) $|x|_a = |x|_b$. Esto significa que el número de letras a es igual al de letras b en la subcadena x.

c) todo prefijo y de x verifica que: $|y|_a \geq |y|_b$. (septiembre 1996)

3. Obtener la Forma Normal de Chomsky (FNC) de la siguiente gramática:

$S \rightarrow aAb \mid cB \mid C$
 $A \rightarrow dB \mid ddC \mid C \mid \lambda$
 $B \rightarrow ff \mid bD$
 $C \rightarrow ab$
 $D \rightarrow e \mid \lambda$

Comprobar si la cadena $x=abcd$ pertenece o no al lenguaje generado por la gramática. En caso afirmativo, encontrar uno de los posibles árboles sintácticos de derivación para dicha cadena dentro de su FNC. (febrero 1997)

4. Demostrar que si L_1 , y L_2 son lenguajes independientes del contexto, entonces su unión es otro lenguaje independiente del contexto. Asimismo, probar que mediante la concatenación de L_1 y L_2 también se obtiene un lenguaje independiente del contexto. (febrero 1997)
5. A partir del alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ se construye el lenguaje $L = \{a^r b^s c^t / s = r + t\}$. Demostrar que L es independiente del contexto. (junio 1997)
6. Dada la gramática independiente del contexto:

$$S \rightarrow aSB/\lambda$$

$$B \rightarrow b/bb$$

donde a y b son símbolos terminales. Por su parte B es un auxiliar y S el símbolo inicial. Obtener el lenguaje L que representa. (junio 1997)

7. Demostrar que el lenguaje $L = \{a^m b^n a^m / n, m > 0\}$ es independiente del contexto pero no es regular. (septiembre 1997)
8. ¿Es posible obtener una gramática regular que sea ambigua? Si se puede, dar un ejemplo. Si no, justifíquese la respuesta dada. (febrero 1998)
9. Sea L un lenguaje definido por las siguientes condiciones:

- a) $b \in L$ y $\lambda \in L$
- b) Si $x \in L \Rightarrow axb \in L$ y $bxa \in L$
- c) Si $x, y \in L \Rightarrow xy \in L$

Se pide:

- Una gramática que genere a L.
- Demostrar que el lenguaje $L = \{w \in (a/b)^* / |w|_b \geq |w|_a\}$
- Hallar L^2 .
- Demostrar que L no es regular. (junio 1998)

10. Dada la siguiente gramática:

$$S \rightarrow AA$$

$$A \rightarrow AAA \mid a \mid bA \mid Ab$$

- a) Hallar una cadena, lo más corta posible, que ponga de manifiesto la ambigüedad de la gramática.
- b) Probar que el símbolo A puede derivar en cero o más pasos en A^{2k+1} ($\forall k \geq 0$).

- b) Estudiar la ambigüedad.
 c) Calcular el lenguaje que genera.
 d) Demostrar que dicho lenguaje es regular. (junio 1999)
15. Comprobar si el cierre de un lenguaje independiente del contexto, es también independiente del contexto.
16. Estudiar la pertenencia de $L = \{x \in (a/b/c)^* / x = w cw \ w \in (a/b)^*\}$ a los lenguajes independientes del contexto. En caso afirmativo, obténgase la Forma Normal de Chomsky de la gramática que lo genera. (febrero 2000)
17. Calcular el lenguaje que genera la siguiente gramática.

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aSb \mid bSa \mid aPb \mid bPa$$

$$P \rightarrow aPa \mid bPb \mid c$$
 (septiembre 2000)
18. Demostrar que si una gramática independiente del contexto (GIC) tiene todas sus reglas de la forma:
 $A \rightarrow wB$ ó $A \rightarrow w$;
- (donde w es una cadena de uno o más terminales y, por su parte, A y B son auxiliares), entonces el lenguaje generado por dicha gramática es regular. (febrero 2001)
19. Si dos lenguajes independientes del contexto no son ambiguos, ¿se puede asegurar, a priori, que su unión da como resultado otro lenguaje no ambiguo? En caso negativo, póngase una condición suficiente a los lenguajes de partida para que esta característica se preserve mediante la unión. (febrero 2001)
20. Dado el lenguaje $L = \{a^i b^j c^k / i \geq j \leq k \ \forall i, j, k \in \mathbb{N}\}$, demuéstrese que no es independiente del contexto. (junio 2001)
21. Dados los lenguajes:

$$L_1 = a^* (b|c)^* \cap \{x \in (a|b|c)^* / |x|_a = |x|_b + |x|_c\}$$

$$L_2 = \{a^i b^j c^k / i + j = k\}$$
- Obténgase una gramática independiente del contexto para cada uno de ellos. (septiembre 2001)
22. Encuéntrese una gramática independiente del contexto para el siguiente lenguaje.
 $L = \{x \in (a/b/c)^* / |x|_a + |x|_b = |x|_c\}$ (febrero 2002)
23. Estudiar la pertenencia del lenguaje $L = \{w \in (a|b|c)^* / |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$ al grupo de los independientes del contexto. (junio 2002)
24. Dada la siguiente gramática:

$$S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \lambda$$

Demuéstrese que cualquier prefijo de una palabra generada por esta gramática, cumple que el número de a's es mayor o igual al de b's. (septiembre 2002)

25. Obténgase el lenguaje generado por la siguiente gramática y demuéstrese que no es regular.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ A &\rightarrow B \mid aAb \\ B &\rightarrow aaBb \mid \lambda \end{aligned} \quad \text{(enero 2003)}$$

26. En la gramática:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow B \mid C \\ A &\rightarrow \lambda \\ B &\rightarrow Aa \mid Bb \mid Ca \\ C &\rightarrow Ab \mid Ba \mid Fa \\ D &\rightarrow Sa \\ E &\rightarrow a \mid b \\ F &\rightarrow FE \mid aF \end{aligned}$$

Obténgase la lista de símbolo inútiles, simplifíquese y transfórmese a Forma Normal de Chomsky. (enero 2003)

27. Un palíndromo es una cadena que se lee igual de izquierda a derecha, que de derecha a izquierda. Para un alfabeto arbitrario, clasifíquese justificadamente al lenguaje formado por todos sus palíndromos dentro de la Jerarquía de Chomsky. (febrero 2003)

28. Encuéntrese una gramática independiente del contexto para el siguiente lenguaje: $L = \{x \in (a/b)^* \mid |x|_a = 2 \cdot |x|_b\}$. Recuérdese que no basta con dar dicha gramática, sino que hay que probar que, efectivamente, el lenguaje aceptado coincide con el de este enunciado. (febrero 2003)

29. Considérese el lenguaje $L = \{a^i b^j c^k \mid (i \leq k) \vee (j \leq k)\}$ y clasifíquese dentro de la Jerarquía de Chomsky. Asimismo, obténgase una gramática que lo genere con no más de cinco auxiliares. Conviene recordar en este último punto, que no basta con dar la gramática, sino que es necesario demostrar que el lenguaje asociado a dicha gramática es exactamente L. (febrero 2004)

30. Constrúyase una gramática independiente del contexto para cada uno de estos lenguajes:

a) $L_1 = \{a^n b^m \mid n \geq 0, m > n\}$

b) $L_2 = \{a^{n+2} b^n \mid n \geq 1\}$

c) $L_3 = \{a^n b^{n-3} \mid n \geq 3\}$

d) $L_1 L_2$

e) $L_1 \cup L_2$

f) L_2^3

g) L_1^*

h) $L_4 = \{ab^n a / n \geq 1\}$ (julio 2004)

31. Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, hállese una gramática regular que genere las cadenas de Σ^* , que no contengan la secuencia abc . Recuérdese que la solución propuesta no será admitida sin su correspondiente demostración. (julio 2004)

32. Estúdiense la pertenencia a los lenguajes regulares y a los independientes del contexto de estos lenguajes:

a) $L = \{a^{n!} / n \geq 3\}$

b) El complementario de $L = \{ww / w \in (a|b)^*\}$ (julio 2004)

33. Clasifíquese los siguientes lenguajes en la Jerarquía de Chomsky dentro del tipo más restrictivo y justifíquese. (febrero 2005)

i) $\{a^i b^{2i} / i \geq 1\}$

ii) $\{(ab)^i / i \geq 1\}$

iii) $\{a^{2^n} / n \geq 1\}$

iv) $\{a^n b^n a^{n+m} / n, m \geq 1\}$

v) $\{w \in (a|b)^* / w = w^t\}$

vi) $\{wxw^t / w, x \in (a|b)^+\}$

34. Propóngase justificadamente una gramática independiente del contexto para los lenguajes que vienen a continuación.

a) $\{a^m b^n / m \geq n\}$

b) $\{w \in (a|b)^* / |w|_a = 2|w|_b\}$

c) $\{w \in (a|b|c)^* / |w| \text{ sea par}\}$ (julio 2005)

35. Estúdiense la pertenencia a los lenguajes independientes del contexto de:

a) $\{a^i b^i c^j / j \geq i\}$

b) $\{a^i b^j c^k / i \leq j \leq k\}$ (julio 2005)

36. Pruébese que cualquier lenguaje regular se puede generar mediante una gramática con reglas de producción solamente de los siguientes tipos:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow Ba \\ A \rightarrow a \end{array} \right\} \quad \text{donde } A \text{ y } B \text{ son auxiliares, y, "a" es un terminal}$$

cualquiera. (enero 2006)

37. Diseñese una gramática independiente del contexto para el lenguaje:

$$L = \{a^i b^j c^k / (i \neq j) \vee (j \neq k)\}$$

Recuerde que no basta con poner una solución, sino que hay que demostrar que la gramática propuesta genera exactamente el lenguaje L. (enero 2006)

38. Obténgase una gramática independiente del contexto para el lenguaje compuesto por palabras formadas por aes y bes, tales que no contengan la subcadena "ba". Recuerde que no basta con poner una solución, sino que hay que demostrar que la gramática propuesta genera exactamente el lenguaje pedido. (febrero 2006)

39. Clasifíquese dentro de la Jerarquía de Chomsky el siguiente lenguaje:

$$L = \{a^i b^j a^k / j = \max(i, k)\}$$
 (febrero 2006)

40. Obténgase una gramática regular para generar todos los naturales en decimal múltiplos de tres solamente. (julio 2006)

41. Sea el lenguaje $L = \{w\bar{w}^1 / w \in (0|1)^*\}$; donde \bar{w} representa el complemento a uno de la tira de bits de w y el superíndice 1 , a la cadena reflejada o inversa. Encuédrese a este lenguaje en la categoría más restrictiva dentro de la Jerarquía de Chomsky. (enero 2007)

42. Dada la G.I.C: $S \rightarrow aS | Sb | a | b$, verifíquese la posibilidad de que cualquier palabra del lenguaje pueda contener la subcadena ba . Hállase el lenguaje generado por esta gramática. (enero 2007)

43. Tómese una gramática independiente del contexto sin reglas lambda y una cadena de longitud n obtenida por dicha gramática en m pasos. Si este proceso de derivación se representase mediante un árbol, ¿cuántos nodos tendría en función de las cantidades n y m ? (febrero 2007)

44. Clasifíquese correctamente dentro de la Jerarquía de Chomsky al siguiente lenguaje:

$$L = \{a^m b^n c^p d^q / m + p = n + q; n \geq m, p \geq q; n, m, p, q \in \mathbb{N}\}$$

Y, si fuera posible, calcúlese una gramática que lo genere con no más de cuatro auxiliares. (febrero 2007)

45. Clasifíquese correctamente dentro de la Jerarquía de Chomsky al siguiente lenguaje:

$$L = \{a^m b^n; m > n; n, m \in \mathbb{N}\} \quad (\text{julio 2007})$$

46. Se sabe que, por ejemplo, el lenguaje de las cadenas compuestas por *aes* solamente, cuya longitud es un número primo, no es regular, pero tampoco independiente del contexto. Lo mismo sucede con el lenguaje constituido por las palabras de un cuadrado perfecto de *aes* sólo. ¿Qué tienen en común estos casos para que por incumplimiento del lema de bombeo de los lenguajes regulares, se pueda inferir lo mismo con el lema de bombeo de los independientes del contexto? Justifíquese la respuesta. (julio 2007)

47. Clasifíquese en la categoría más restrictiva de la Jerarquía de Chomsky al siguiente lenguaje:

$$L = \{w \in (a|b)^* \mid |w|_a < |w|_b\}$$

Nota: para la resolución de este ejercicio solamente se admitirá el uso de resultados obtenidos en esta asignatura, quedando expresamente prohibidos el empleo de los de Tª de Autómatas y Lenguajes Formales II. (enero 2008)

48. Verifíquese si la intersección de lenguajes independientes del contexto es una operación interna. (enero 2008)

49. Utilizando solamente la Teoría de Lenguajes Formales, clasifíquese correctamente dentro de la Jerarquía de Chomsky al siguiente conjunto de cadenas binarias:

$$L = \{0^i 1^j x \mid (i, j \in \mathbb{N}); (x = 0 \Leftrightarrow i \geq j); (x = 1 \Leftrightarrow i < j)\} \quad (\text{febrero 2008})$$

50. Calcúlese una gramática lo más restrictiva posible para el siguiente lenguaje y justifíquese dentro de la Jerarquía de Chomsky.

$$L = \{a^{2i} b^j c^k \mid 3i = j + k; i, j, k \in \mathbb{N}\} \quad (\text{julio 2008})$$

51. Sea la gramática independiente del contexto definida por las siguientes producciones:

$$G \begin{cases} S \rightarrow CB|CCBC & C \rightarrow AA \\ A \rightarrow a|aA|BB|BBA|\lambda & D \rightarrow AA|BC|a \\ B \rightarrow aBb|b \end{cases}$$

Obténgase una gramática simplificada y una Forma Normal de Chomsky que genere $L(G) - \{\lambda\}$. (julio 2008)