# GRAMÁTICAS y LENGUAJES INDEPENDIENTES DEL CONTEXTO

1. Convertir la siguiente gramática en una forma normal de Chomsky:

   $S \to aAb \mid cHB \mid CH$
   $A \to dBH \mid eeC \mid C \mid \lambda$
   $B \to ff \mid D$
   $C \to gFB \mid ah$
   $D \to i$
   $E \to jF$
   $F \to dcGGG \mid cF$
   $G \to kF$
   $H \to Hln$

   Notación: las letras minúsculas representan símbolos terminales, mientras que las mayúsculas son símbolos auxiliares. El símbolo inicial es, como viene siendo habitual, S. (febrero 1996)

2. Dada la gramática independiente de contexto G: $\left\{ \begin{array}{l} S \to Rc \\ R \to aRbR \mid \lambda \end{array} \right\}$ probar que, las cadenas w que genera, cumplen simultáneamente:

   a) $w = xc \quad / \; x \in (a / b)^*$

   b) $|x|_a = |x|_b$. Esto significa que el número de letras a es igual al de letras b en la subcadena x.

   c) todo prefijo y de x verifica que: $|y|_a \geq |y|_b$. (septiembre 1996)

3. Obtener la Forma Normal de Chomsky (FNC)de la siguiente gramática:

   $S \to aAb \mid cB \mid C$
   $A \to dB \mid ddC \mid C \mid \lambda$
   $B \to ff \mid bD$
   $C \to ab$
   $D \to e \mid \lambda$

   Comprobar si la cadena x=abcd pertenece o no al lenguaje generado por la gramática. En caso afirmativo, encontrar uno de los posibles árboles sintácticos de derivación para dicha cadena dentro de su FNC. (febrero 1997)

4. Utilícese el algoritmo CYK para determinar, si las cadenas *bba*, *bab* y *babba* pertenecen al lenguaje generado por la siguiente gramática.

$S \to AB$
$A \to BC \mid a$
$B \to CC \mid b$
$C \to a$

5. Demostrar que si $L_1$, y $L_2$ son lenguajes independientes del contexto, entonces su unión es otro lenguaje independiente del contexto. Asimismo, probar que mediante la concatenación de $L_1$ y $L_2$ también se obtiene un lenguaje independiente del contexto. (febrero 1997)

6. A partir del alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ se construye el lenguaje $L = \{a^r b^s c^t \ / \ s = r + t\}$. Demostrar que L es independiente del contexto. (junio 1997)

7. Dada la gramática independiente del contexto:

   $S \to aSB/\lambda$
   $B \to b/bb$

   donde a y b son símbolos terminales. Por su parte B es un auxiliar y S el símbolo inicial. Obtener el lenguaje L que representa. (junio 1997)

8. Demostrar que el lenguaje $L=\{a^m b^n a^m \ / \ n,m>0\}$ es independiente del contexto pero no es regular. (septiembre 1997)

9. ¿Es posible obtener una gramática regular que sea ambigua? Si se puede, dar un ejemplo. Si no, justifíquese la respuesta dada. (febrero 1998)

10. Sea L un lenguaje definido por las siguientes condiciones:

    a) $b \in L$ y $\lambda \in L$

    b) Si $x \in L \Rightarrow axb \in L$ y $bxa \in L$

    c) Si $x,y \in L \Rightarrow xy \in L$

    Se pide:

    - Una gramática que genere a L.
    - Demostrar que el lenguaje $L = \{w \in (a/b)^* \ / |w|_b \geq |w|_a\}$
    - Hallar $L^2$.
    - Demostrar que L no es regular. (junio 1998)

11. Dada la siguiente gramática:

    $S \to AA$
    $A \to AAA \mid a \mid bA \mid Ab$

a) Hallar una cadena, lo más corta posible, que ponga de manifiesto la ambigüedad de la gramática.

b) Probar que el símbolo A puede derivar en cero o más pasos en $A^{2k+1}$ ($\forall k \geq 0$).

c) Demostrar que el símbolo A puede derivar en cero o más pasos en cadenas de la forma $b^n a b^m$ ($\forall n,m \geq 0$).

d) Demostrar que si $x \in (a|b)^*$ y $|x|_a$ es un número par estrictamente positivo entonces $x \in L(G)$.

e) Obtener L(G).

f) Proponer una gramática regular para L(G) y un RFD que lo acepte.

(septiembre 1998)

12. Dada la gramática:

$S \rightarrow aSc \mid bSc \mid \lambda$ donde S es el símbolo inicial y a, b, c son símbolos terminales.

Se pide:

a) El lenguaje que genera esta gramática (justificación).

b) Demostrar que dicho lenguaje no es regular. (enero 1999)

13. Dada la siguiente gramática, obtener la expresión más simple posible que represente al lenguaje generado por dicha gramática.

$S \rightarrow aA \mid aB \mid bS$
$A \rightarrow aB \mid aA \mid bC \mid bD \mid bE$
$B \rightarrow bS \mid bF$
$C \rightarrow aE \mid aB$
$E \rightarrow aD \mid aC \mid bF$
$F \rightarrow aE \mid aC \mid aD \mid bF \mid \lambda$

donde S es el símbolo inicial, las letras mayúsculas son auxiliares y las minúsculas terminales. (febrero 1999)

14. Simplificar la siguiente gramática y ponerla en la Forma Normal de Chomsky.

$S \rightarrow AB \mid A \mid CSa \mid bE$
$A \rightarrow bAS \mid \lambda \mid Ab \mid C$
$B \rightarrow Ba \mid a$
$D \rightarrow Ba \mid \lambda \mid aF$
$E \rightarrow Ea$
$F \rightarrow bD$ (febrero 1999)

15. Dada la siguiente gramática:

$S \rightarrow aRa \mid bRb$
$R \rightarrow S \mid aT \mid bT$
$T \rightarrow aT \mid bT \mid \lambda$

a) Verificar la pertenencia de la palabra vacía al lenguaje generado por la gramática.

b) Estudiar la ambigüedad.

c) Calcular el lenguaje que genera.

d) Demostrar que dicho lenguaje es regular. (junio 1999)

16. Comprobar si el cierre de un lenguaje independiente del contexto, es también independiente del contexto.

17. Estudiar la pertenencia de $L = \{x \in (a/b/c)^* / x = wcw \;\; w \in (a/b)^*\}$ a los lenguajes independientes del contexto. En caso afirmativo, obténgase la Forma Normal de Chomsky de la gramática que lo genera. (febrero 2000)

18. Calcular el lenguaje que genera la siguiente gramática.

    $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aSb \mid bSa \mid aPb \mid bPa$
    $P \rightarrow aPa \mid bPb \mid c$ (septiembre 2000)

19. Demostrar que si una gramática independiente del contexto (GIC) tiene todas sus reglas de la forma:

    $A \rightarrow wB$ ó $A \rightarrow w$;

    (donde w es una cadena de uno o más terminales y, por su parte, A y B son auxiliares), entonces el lenguaje generado por dicha gramática es regular. (febrero 2001)

20. Si dos lenguajes independientes del contexto no son ambiguos, ¿se puede asegurar, a priori, que su unión da como resultado otro lenguaje no ambiguo? En caso negativo, póngase una condición suficiente a los lenguajes de partida para que esta característica se preserve mediante la unión. (febrero2001)

21. Dado el lenguaje $L = \{a^i b^j c^k \; / \; i \geq j \leq k \quad \forall i, j, k \in \mathrm{N}\}$, demuéstrese que no es independiente del contexto. (junio 2001)

22. Dados los lenguajes:

$$L_1 = a^*(b \mid c)^* \cap \{x \in (a \mid b \mid c)^* / |x|_a = |x|_b + |x|_c\}$$
$$L_2 = \{a^i b^j c^k / i + j = k\}$$

Obténgase una gramática independiente del contexto para cada uno de ellos. (septiembre 2001)

23. Encuéntrese una gramática independiente del contexto para el siguiente lenguaje. $L = \{x \in (a/b/c)^* / |x|_a + |x|_b = |x|_c\}$ (febrero 2002)

24. Estudiar la pertenencia del lenguaje $L = \{w \in (a \mid b \mid c)^* / |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$ al grupo de los independientes del contexto. (junio 2002)

25. Dada la siguiente gramática:

$$S \to aS \mid aSbS \mid \lambda$$

Demuéstrese que cualquier prefijo de una palabra generada por esta gramática, cumple que el número de a´s es mayor o igual al de b's. (septiembre 2002)

26. Obténgase el lenguaje generado por la siguiente gramática y demuéstrese que no es regular.

S → A
A → B | aAb
B → aaBb | λ (enero 2003)

27. En la gramática:

S → B | C
A → λ
B → Aa | Bb | Ca
C → Ab | Ba | Fa
D → Sa
E → a | b
F → FE | aF

Obténgase la lista de símbolo inútiles, simplifíquese y transfórmese a Forma Normal de Chomsky. (enero 2003)

28. Un palíndromo es una cadena que se lee igual de izquierda a derecha, que de derecha a izquierda. Para un alfabeto arbitrario, clasifíquese justificadamente al lenguaje formado por todos sus palíndromos dentro de la Jerarquía de Chomsky. (febrero 2003)

29. Encuéntrese una gramática independiente del contexto para el siguiente lenguaje: $L = \{x \in (a/b)^* / |x|_a = 2 \cdot |x|_b\}$. Recuérdese que no basta con dar dicha gramática, sino que hay que probar que, efectivamente, el lenguaje aceptado coincide con el de este enunciado. (febrero 2003)

30. Considérese el lenguaje $L = \{a^i b^j c^k / (i \le k) \vee (j \le k)\}$ y clasifíquese dentro de la Jerarquía de Chomsky. Asimismo, obténgase una gramática que lo genere con no más de cinco auxiliares. Conviene recordar en este último punto, que no basta con dar la gramática, sino que es necesario demostrar que el lenguaje asociado a dicha gramática es exactamente L. (febrero 2004)

31. Constrúyase una gramática independiente del contexto para cada uno de estos lenguajes:

    a) $L_1 = \{a^n b^m / n \ge 0, m > n\}$

    b) $L_2 = \{a^{n+2} b^n / n \ge 1\}$

    c) $L_3 = \{a^n b^{n-3} / n \ge 3\}$

    d) $L_1 L_2$

    e) $L_1 \cup L_2$

    f) $L_2^3$

    g) $L_1^*$

    h) $L_4 = \{ab^n a / n \ge 1\}$ (julio 2004)

32. Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, hállese una gramática regular que genere las cadenas de $\Sigma^*$, que no contengan la secuencia $abc$.Recuérdese que la solución propuesta no será admitida sin su correspondiente demostración. (julio 2004)

33. Estúdiese la pertenencia a los lenguajes regulares y a los independientes del contexto de estos lenguajes:

    a) $L = \{a^{n!} / n \ge 3\}$

    b) El complementario de $L = \{ww / w \in (a \mid b)^*\}$ (julio 2004)

34. Clasifíquese los siguientes lenguajes en la Jerarquía de Chomsky dentro del tipo más restrictivo y justifíquese. (febrero 2005)

    i) $\{a^i b^{2i} / i \ge 1\}$

    ii) $\{(ab)^i / i \ge 1\}$

iii) $\{a^{2n} / n \geq 1\}$

iv) $\{a^n b^n a^{n+m} / n, m \geq 1\}$

v) $\{w \in (a \mid b)^* / w = w^I\}$

vi) $\{wxw^I / w, x \in (a \mid b)^+\}$

35. Propóngase justificadamente una gramática independiente del contexto para los lenguajes que vienen a continuación.

a) $\{a^m b^n / m \geq n\}$

b) $\{w \in (a \mid b)^* / \mid w \mid_a = 2 \mid w \mid_b\}$

c) $\{w \in (a \mid b \mid c)^* / \mid w \mid \textit{sea par}\}$ (julio 2005)

36. Estúdiese la pertenencia a los lenguajes independientes del contexto de:

a) $\{a^i b^i c^j / j \geq i\}$

b) $\{a^i b^j c^k / i \leq j \leq k\}$ (julio 2005)

37. Pruébese que cualquier lenguaje regular se puede generar mediante una gramática con reglas de producción solamente de los siguientes tipos:

$\begin{Bmatrix} A \to Ba \\ A \to a \end{Bmatrix}$ donde A y B son auxiliares, y, "a" es un terminal cualquiera. (enero 2006)

38. Diséñese una gramática independiente del contexto para el lenguaje:

$L = \{a^i b^j c^k / (i \neq j) \vee (j \neq k)\}$

Recuerde que no basta con poner una solución, sino que hay que demostrar que la gramática propuesta genera exactamente el lenguaje L. (enero 2006)

39. Obténgase una gramática independiente del contexto para el lenguaje compuesto por palabras formadas por aes y bes, tales que no contengan la subcadena "ba". Recuerde que no basta con poner una solución, sino que hay que demostrar que la gramática propuesta genera exactamente el lenguaje pedido. (febrero 2006)

40. Clasifíquese dentro de la Jerarquía de Chomsky el siguiente lenguaje:

$L = \{a^i b^j a^k / j = \max(i, k)\}$ (febrero 2006)

41. Obténgase una gramática regular para generar todos los naturales en decimal múltiplos de tres solamente. (julio 2006)

42. Sea el lenguaje $L = \{w\overline{w}^{I} / w \in (0|1)^*\}$; donde $\overline{w}$ representa el complemento a uno de la tira de bits de w y el superíndice $^{I}$, a la cadena reflejada o inversa. Encuádrese a este lenguaje en la categoría más restrictiva dentro de la Jerarquía de Chomsky. (enero 2007)

43. Dada la G.I.C: $S \to aS \mid Sb \mid a \mid b$, verifíquese la posibilidad de que cualquier palabra del lenguaje pueda contener la subcadena $ba$. Hállese el lenguaje generado por esta gramática. (enero 2007)

44. Tómese una gramática independiente del contexto sin reglas lambda y una cadena de longitud *n* obtenida por dicha gramática en *m* pasos. Si este proceso de derivación se representase mediante un árbol, ¿cuántos nodos tendría en función de las cantidades *n* y *m*? (febrero 2007)

45. Clasifíquese correctamente dentro de la Jerarquía de Chomsky al siguiente lenguaje:

$$L = \left\{a^m b^n c^p d^q / m + p = n + q; n \geq m, p \geq q; n, m, p, q \in \mathrm{N}\right\}$$

Y, si fuera posible, calcúlese una gramática que lo genere con no más de cuatro auxiliares. (febrero 2007)

46. Clasifíquese correctamente dentro de la Jerarquía de Chomsky al siguiente lenguaje:

$$L = \left\{a^m b^n; m > n; n, m \in \mathrm{N}\right\}$$ (julio 2007)

47. Se sabe que, por ejemplo, el lenguaje de las cadenas compuestas por aes solamente, cuya longitud es un número primo, no es regular, pero tampoco independiente del contexto. Lo mismo sucede con el lenguaje constituido por las palabras de un cuadrado perfecto de aes sólo. ¿Qué tienen en común estos casos para que por incumplimiento del lema de bombeo de los lenguajes regulares, se pueda inferir lo mismo con el lema de bombeo de los independientes del contexto? Justifíquese la respuesta. (julio 2007)

48. Clasifíquese en la categoría más restrictiva de la Jerarquía de Chomsky al siguiente lenguaje:

$$L = \left\{w \in (a \mid b)^* / |w|_a < |w|_b\right\}$$

Nota: para la resolución de este ejercicio solamente se admitirá el uso de resultados obtenidos en esta asignatura, quedando expresamente prohibidos el empleo de los de Tª de Autómatas y Lenguajes Formales II. (enero 2008)

49. Verifíquese si la intersección de lenguajes independientes del contexto es una operación interna. (enero 2008)

50. Utilizando solamente la Teoría de Lenguajes Formales, clasifíquese correctamente dentro de la Jerarquía de Chomsky al siguiente conjunto de cadenas binarias:

$L = \{0^i 1^j x / (i, j \in \mathrm{N}); (x = 0 \Leftrightarrow i \geq j); (x = 1 \Leftrightarrow i < j)\}$ (febrero 2008)

51. Calcúlese una gramática lo más restrictiva posible para el siguiente lenguaje y justifíquese dentro de la Jerarquía de Chomsky.

$L = \{a^{2i} b^j c^k / 3i = j + k\,;\ i, j, k \in \mathbb{N}\}$ (julio 2008)

52. Sea la gramática independiente del contexto definida por las siguientes producciones:

$$G \begin{cases} S \to CB|CCBC & C \to AA \\ A \to a|aA|BB|BBA|\lambda & D \to AA|BC|a \\ B \to aBb|b & \end{cases}$$

Obténgase una gramática simplificada y una Forma Normal de Chomsky que genere $L(G) - \{\lambda\}$. (julio 2008)

53. Compruébese si una gramática, que tiene reglas regulares por la izquierda:

$A \to aB;\ A \to a; \quad A, B \in E_A; \quad a \in E_T$

pero también regulares por la derecha:

$A \to Ba;\ A \to a; \quad A, B \in E_A; \quad a \in E_T$

en general, genera un lenguaje también regular. (enero 2009)

54. Estúdiese la pertenencia a los lenguajes independientes del contexto del siguiente caso:

$L = \{a^i b^j c^k / i \geq k; j \geq k\}$ (enero 2009)

55. Estúdiese la pertenecía a los lenguajes independientes del contexto de los siguientes lenguajes:

i) $L_1 = \{a^n b a^m b a^{n+m} / n, m \geq 1\}$

ii) $L_2 = \{a^n c^m c c a^{m^n} / n, m \geq 1\})$ (febrero 2009)

56. Calcúlese el lenguaje generado por esta gramática y obténgase una Forma Normal de Chomsky de la misma con el menor número de auxiliares.

$$\begin{array}{ll} S \to aAb|cHB|CH & E \to jF \\ A \to dBH|eeC & F \to dcGGG|cF \\ B \to ff|D & G \to kF \\ C \to gFB|ah & H \to Hlm \\ D \to i & \end{array}$$

Nota: como viene siendo habitual, las letras mayúsculas son auxiliares y las minúsculas, terminales. (febrero 2009)

57. Obténgase, si es posible, una gramática independiente del contexto para el lenguaje $LL^I$, donde:

$$L = \{a^n b^{n+m} c^m / \ n, m \epsilon \mathbb{N}\}$$

Inspirado en esta idea surge la operación sobre cadenas $p(w) = ww^I$, que extendido a las palabras de un lenguaje daría como resultado $p(L) = \{ww^I / \ w \epsilon L\}$. Si $L$ fuera independiente del contexto, ¿lo sería también $p(L)$, en general? (Julio 2009)

58. Sea la gramática independiente del contexto definida por las siguientes producciones:

$$G: \begin{cases} S \rightarrow AAab|BC|A & B \rightarrow aBb|BC \\ A \rightarrow bSb|SB|\lambda & C \rightarrow AS|\lambda \end{cases}$$

Obténgase una gramática simplificada y una Forma Normal de Chomsky que genere $L(G) - \{\lambda\}$. (Julio 2009)

59. Considérese el lenguaje: $L = \{a^n bxba^n / \ |x|_a = n \epsilon \mathbb{N}; \ \ x \epsilon (a|b)^*\}$. Estúdiese su pertenencia a los de tipo 3 ó 2 dentro de la Jerarquía de Chomsky. (Julio 2009)

60. Clasifíquese dentro de la Jerarquía de Chomsky a cada uno de estos lenguajes:

$$L_1 = \{w \in (a|b)^* / |w|_a = 3n; \quad n \in \mathbb{N}\}$$

$$L_2 = \left\{a^i b^j c^k / \ i \neq j \ \lor j \neq k\right\}$$ (enero 2010)

61. Constrúyase justificadamente el autómata finito no determinista asociado a una gramática regular por la izquierda, esto es, aquella cuyas reglas son de la forma:

$$\begin{cases} A \rightarrow Ba \\ A \rightarrow a \end{cases} \qquad A, B \epsilon E_A \quad a \epsilon E_T$$ (febrero 2010)

62. Clasifíquese dentro de la Jerarquía de Chomsky al siguiente lenguaje:

$$L = \left\{a^i c^j b^k / \ i \neq k; \quad i, j, k \in \mathbb{N}\right\}$$ (febrero 2010)

63. Obténgase una gramática regular por la izquierda y otra por la derecha lo más simple posible para la siguiente expresión regular: $ab^*c(ab^*c)^*$ (julio 2010)

64. Dada la gramática $G$ definida por las siguientes reglas, se pide obtener una equivalente simplificada y en Forma Normal de Chomsky que genere $L(G) - \{\lambda\}$.

$$G: \begin{cases} S \rightarrow ASC|AA|CaC & C \rightarrow bC|b \\ A \rightarrow aAa|\lambda & D \rightarrow BBB|DD \\ B \rightarrow aBb|CB|b & \end{cases}$$ (julio 2010)

65. Estúdiese la pertenecía a los lenguajes independientes del contexto de los siguientes conjuntos:

    a) $L = \{xy \;/\; x, y \;\; de\ longitud\ impar\ con\ un\ 0\ en\ el\ centro\} \subseteq (0|1)^*$

    b) $L = \{a^i b^j c^n d^m / (i = m) \vee (i = n \;\wedge\; j = m)\}$ (julio 2010)

66. Considérese el lenguaje $L$ como el conjunto de cadenas dentro del alfabeto $\{a, b\}$, tales que el número de $aes$ antes de la primera $b$ coincide con el de las $aes$ después de la última $b$. Hallar una gramática lo más restrictiva posible para generar este lenguaje, dentro de la Jerarquía de Chomsky. Justifíquese la solución propuesta. (febrero 2011)

67. Clasifíquese dentro de la Jerarquía de Chomsky al siguiente lenguaje:

$$L = \{a^n bxba^n / \; |x|_a = n; \;\; x \in (a|b)^*; \;\; n > 0\}$$

(febrero 2011)

68. Sea el lenguaje $L = \{a^k b^m c^p \;/\; p = k + 2m; \;\; \forall k, m \in \mathbb{N}\}$. Clasifíquese dentro de la categoría más restrictiva dentro de la Jerarquía de Chomsky. (julio 2011)

69. Dada la siguiente gramática:

$$G: \begin{cases} S \to AaAB|B|EE|BA|\lambda|\text{a} & A \to BS|CEC|ab|\lambda \\ B \to aa|AbB & C \to aC|D \\ D \to aC|C|CEE & E \to aC|CD|EE|\lambda \end{cases}$$

Donde las letras minúsculas son símbolos terminales y, las mayúsculas, auxiliares. Obténgase una gramática $G'$simplificada y en Forma Normal de Chomsky, tal que $L(G') = L(G) - \{\lambda\}$. (julio 2011)