Dpto. de Informática (ATC, CCIA y LSI). Universidad de Valladolid.

MÁQUINAS DE TURING

1. Construir una máquina de Turing de tres pistas que reste el número binario de la segunda pista del número binario de la primera y deje el resultado en la tercera pista con las siguientes especificaciones:

   a) En la primera y segunda cinta inicialmente sólo hay caracteres en blanco salvo sendas tiras de ceros y unos.

   b) Tanto el minuendo como el substraendo expresan números naturales codificados en binario natural de la misma longitud, los cuales se encuentran alineados.

   c) La tercera cinta inicialmente está llena de caracteres en blanco.

   d) El resultado deberá estar alineado por la derecha con los datos de las otras dos cinta, de tal manera, que si el resultado es negativo, deberá parecer un "1" en la cifra más significativa, considerándose que lo que viene a continuación es el valor absoluto de la diferencia.

   e) Inicialmente el cabezal puede estar situado sobre cualquier par de dígitos de los datos de entrada. (junio 1996)

2. Construir una máquina de Turing que acepte el lenguaje: $L = \left\{ w \in \Sigma \,/\, |w|_a = |w|_b \right\}$; donde el alfabeto es: $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$ (septiembre 1996)

3. Dada la gramática independiente del contexto:

   $S \to aSB/\lambda$
   $B \to b/bb$ donde a y b son símbolos terminales. Por su parte B es un auxiliar y S el símbolo inicial.

   Obtener:

   - El lenguaje L que representa.
   - Un autómata de pila no determinista que acepte a L.
   - Una máquina de Turing con una sola cinta que reconozca a L. Asimismo, mostrar la sucesión de descripciones instantáneas por las que atravesaría el autómata al procesar dos cadenas de longitud cinco: una de ellas aceptada y la otra no. (junio 1997)

4. Probar que si L es un lenguaje regular, existe una máquina de Turing, que reconoce a todas las cadenas w pertenecientes a dicho lenguaje en un número de pasos no superior a |w|+1. (sept. 1997)

5. Diseñar una máquina de Turing con tan sólo tres estados, que sea capaz de generar el código binario natural en orden creciente. La situación de partida corresponde con una cinta repleta de caracteres

blanco salvo un cero, al que precisamente apunta el cabezal antes de comenzar a funcionar. Lógicamente, este autómata no se para nunca. Dispondrá de estados finales, en los cuales se realizaría la lectura de la cinta. Así, se irían registrando salidas: b0b, b1b, b10b, b11b, b100b, b101b, b110b, b111b, etc. Cuando no se encuentre en uno de estos estados de aceptación, la cinta se utilizará como se estime más oportuno. (junio 1998)

6. Construir una máquina de Turing con tres pistas, que se pare en un estado final solamente si el número binario almacenado en la primera pista es un múltiplo del de la segunda, también codificado en binario natural. Se considera estos dos números alineados por el bit menos significativo, posición a la que apunta el cabezal en el instante inicial. Respecto a la tercera pista, se supondrá que arranca vacía de contenido (espacios en blanco). (enero 1999)

7. Dado el siguiente lenguaje $L = \{a^m b^n a^m b^n \,/\, n,m > 0\}$, estudiar su pertenencia al conjunto de los independientes del contexto. En caso afirmativo, obtener el autómata de pila no determinista que lo reconoce. En caso negativo, diseñar una máquina de Turing que acepte dicho lenguaje. (ene. 2000)

8. Diseñar una máquina de Turing con una sola cinta que produzca en orden creciente a su longitud las cadenas de $L = \{a^{n^2} \,/\, n \in \mathrm{N}\}$. Inicialmente, dicho autómata arranca con toda la cinta llena de espacios en blanco, la cual se podrá utilizar como se estime más conveniente, pero se ha de reservar una ventana para mostrar la cadena generada. Este trozo de cinta estará acotado por espacios en blanco, en medio de los cuales se situará la palabra correspondiente, cuya lectura se realizará cada vez que se alcance el estado final q_f. En este instante, el cabezal deberá estar en el extremo inmediatamente anterior a la palabra, es decir, en el primer blanco a la izquierda. Para facilitar la construcción, ocasionalmente se permitirá la parada del cabezal en alguna transición.(*sept. 2000*)

9. Pruébese que el lenguaje $L = \{a^i \,/\, i = 2^n \quad \forall n \in \mathrm{N}\}$ es recursivo. (junio 2001)

10. Diséñese una máquina de Turing, con no más de cinco estados, que acepte el lenguaje, dentro del alfabeto {a, b, c}, cuyas cadenas no tienen ninguna “a” en su primera mitad y ninguna “b” en su segunda. A tenor de esta especificación, debe entenderse que las palabras de longitud impar no son admitidas. (septiembre 2002)

11. Se dispone de un programa de ordenador concebido para reconocer un determinado lenguaje, que es recursivamente enumerable y no recursivo. ¿Cómo se comportará este programa ante una cadena arbitraria de entrada? Escoja una de las siguientes respuestas y justifíquese su elección.

    a) no parará.

    b) parará respondiendo afirmativa o negativamente a la aceptación de la cadena como parte del lenguaje.

    c) se detendrá aceptando a todas las cadenas del lenguaje, pero es posible que para alguna del complementario no se pare.

    d) ante todas las cadenas del lenguaje se parará respondiendo afirmativamente, pero siempre habrá una cadena del complementario, al menos, para la cual dicho programa no se detendrá.

    Análogamente, imagínese un “superprograma” al que se le introduce un programa arbitrario y cualquiera de sus entradas. La misión de este “superprograma” es determinar de antemano si el programa suministrado, ante una entrada particular, se detendrá o no. ¿Qué se puede comentar acerca de este "superprograma" si se le introdujese el programa del párrafo anterior? Escoja una de las siguientes respuestas y justifíquese su elección.

a) Que no podría existir, porque.....(completar)

b) Nada. No tiene nada que ver.

c) Es perfectamente factible al tratarse de un lenguaje recursivamente enumerable y no recursivo.

d) Que no podría admitir como entrada el programa, porque.....(completar) (junio 2003)

12. Estúdiese la pertenencia del lenguaje $L = \{ww / w \in (a \mid b)^*\}$ a los denominados recursivos. ¿El resultado obtenido es extrapolable a cualquier otro alfabeto? (septiembre 2003)

13. Verifíquese si el lenguaje $L = \{x \in (a \mid b \mid c)^* / |x|_a = |x|_b = |x|_c\}$ es recursivo. (enero 2004)

14. Considérese la función $m = \log_2 n$, como aquella que devuelve la parte entera del logaritmo en base dos de un número, también, entero y positivo. Demuéstrese que esta operación es Turing computable a través de una función de cadena igualmente Turing computable, que recibe como entrada una cadena de letras a's de tamaño n, y, como salida, otra de longitud m. (junio 2004)

15. Dado un alfabeto Σ y una familia de lenguajes recursivamente enumerables $L_1, L_2, \ldots L_n$ definidos sobre dicho alfabeto, que constituye una partición de Σ^*, demuéstrese, entonces, que cada unos de los lenguajes de esta familia es recursivo. (junio 2005)

16. Se define la operación P(L, L') como aquella que, actuando sobre una cadena, determina si dicha palabra pertenece a uno de los lenguajes (L o L') solamente, pero no a ambos. Si esta operación se modifica para aplicarse a todo el conjunto universal de las entradas, en donde se encontrarían incluidos L y L', ¿sería una operación cerrada (interna) dentro de los lenguajes recursivos?

(septiembre 2005)

17. Sea $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, s, \bar{b}, \delta, F \rangle$ una máquina de Turing, a partir de la cual se define el lenguaje:

$$L_p = \{w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^* / (s, \bar{b}\underline{a_1} a_2 \ldots a_n \bar{b}) \overset{*}{\mapsto} (q, w_1 \underline{\sigma} w_2);\ \delta(q, \sigma) = \phi; w_1, w_2 \in \Gamma^*; \sigma \in \Gamma\};$$

Establézcase con carácter general la relación de conjuntos existente entre L_p y L(M) *(0.5 ptos)*. Por otro lado, ante una máquina de Turing concreta, qué se puede decir de L(M) si:

a) $L_p = \Sigma^*$ b) $L_p \neq \Sigma^*$

Finalmente, póganse un ejemplo de lenguaje formal L dentro de un alfabeto genérico, para el cual toda máquina de Turing cumpliría que: $L(M) \neq L$. (junio 2007)

18. Diseñar una máquina de Turing con una sola cinta que reconozca al lenguaje binario, en cuyas palabras se repita una o más veces la subcadena 100 no necesariamente de forma consecutiva. Este autómata, de aceptar una cadena, tendrá que dejarla en la cinta tal cual apareció antes de su ejecución. (septiembre 2007)

19. Estúdiese la pertenencia a los lenguajes recursivos de:

$$L = \{w_1 \# w_2 \# \ldots \# w_n;\ w_i \in (0\,|\,1)^*;\ i = 1,2\ldots n \,/\, \exists j = 1,2\ldots n \quad j)_2 = w_j\}$$

Como puede verse, cada palabra del lenguaje se compone de una serie de subcadenas separadas por el símbolo # y numeradas por su orden de aparición (j) de izquierda a derecha. Si dichas subcadenas se interpretaran como un número codificado en binario natural, bastaría con que uno de estos valores coincidiera con el de su orden j, para que la palabra fuera incluida en el lenguaje L.

(septiembre 2007)

20. Dado un programa de ordenador, del que se sabe que en algunos casos entra en bucle infinito, ¿se podría siempre sustituirlo por otro cuya respuesta fuera la misma salvo la de esos bucles infinitos, situación que predeciría? Explíquese detalladamente la respuesta. (enero 2008)

21. Sea la operación $P(L) = \{x \in L/x^I \notin L\}$. Verifíquese si esta operación es cerrada en la clase de los lenguajes recursivos. (junio 2008)

22. Considérese un lenguaje $L \subseteq (a|b)^*$ y el obtenido a partir de él como: $L_c = c^+L \cup (a|b)^*$. Para no dar lugar a dudas, conviene aclarar que el nuevo lenguaje cumple que: $L_c \subseteq (a|b|c)^*$. Compruébese, entonces, si las propiedades de L respecto a una máquina de Turing son las mismas que las de L_c y viceversa. (junio 2008)

23. Demuéstrese que la intersección de dos lenguajes recursivamente enumerables es una operación cerrada. Ahora considere que uno de los lenguajes anteriores no es recursivo y el otro es regular. ¿La intersección da siempre como resultado un lenguaje recursivo? Si la respuesta es negativa, estúdiense los casos particulares donde esto sí se da. (septiembre 2008)

24. Sea la operación *f* sobre una palabra *x* definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x_1 x_2^I; & \text{si } |x| \text{ es par, con } x = x_1x_2, \text{donde } |x_1| = |x_2| \\ x_1 a x_2^I; & \text{si } |x| \text{ es impar, con } x = x_1 a x_2, \text{donde } |x_1| = |x_2| \text{ y } a \in \Sigma \end{cases}$$

Si esta operación se extiende a lenguajes de la manera habitual, esto es, $f(L) = \{f(x)/x \in L\}$, verifíquese si es cerrada en el conjunto de los recursivos. (septiembre 2008)

25. Al hacer la diferencia entre dos lenguajes, uno de ellos, recursivo, y, el otro, tan sólo recursivamente enumerable, ¿daría lo mismo el orden de esta operación con vistas a obtener un lenguaje recursivamente enumerable? Justifíquese la respuesta. (junio 2009)

26. Dada la operación: $P(L) = \{x \in L/\exists(u,v)\ x = uv\ \wedge vu \in L\}$, donde L es un lenguaje arbitrario, verifíquese si esta operación es cerrada en el conjunto de los lenguajes recursivos. (junio 2009)

27. Sea un alfabeto indexado $\Sigma = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \ldots .\mathrm{a}_\mathrm{n}, \}$, es decir, que $\exists g{:}\, \Sigma \to \mathbb{N}^+$ inyectiva. De acuerdo con esta aplicación, se puede calcular, para cada palabra de dicho alfabeto $x = b_1b_2b_3 \ldots\ldots b_k$, el número natural asociado $G(x) = \sum_{j=1}^{k} g(b_j)$. A partir de esta operación numérica, se establece otra sobre dos lenguajes de un mismo alfabeto como:

$$L_1 \sqcap L_2 = \{x \in \Sigma^* /\ \exists \mathrm{y} \in L_1\ , z \in L_2 / G(x) = G(y) = G(z)\}$$

Estúdiese el cierre de esta operación dentro de los lenguajes recursivos. (septiembre 2009)

28. Considérese la clase de lenguajes $\mathcal{L}(\Sigma) = \{L \subseteq \Sigma^* \ / \ L \text{ es rec. enumerable no recursivo}\}$. ¿Es cerrada frente a la operación complemento? (septiembre 2009)

29. Clasifíquese lo más restrictivamente posible, dentro de la Jerarquía de Lenguajes vista en la asignatura, al compuesto por palabras que tienen el segmento más largo de aes de igual tamaño que el más largo de bes. Supóngase que el alfabeto se restringe a aes y bes. (junio 2010)

30. Se define la operación $P_R(L) = \{x \in L / \ x \notin R \ \ \wedge \ \ x = x^I\}$. R es un lenguaje recursivo fijado de antemano. Estúdiese el cierre de esta operación dentro de los lenguajes recursivamente enumerables. Hágase lo mismo con el resultado de $L - P_R(L)$. (junio 2010)

31. Tómese dos lenguajes L_1 y L_2 construidos sobre el mismo alfabeto. Si resultase que la unión de ambos y sus diferencias (da igual el orden) son lenguajes recursivos, ¿se podría afirmar que L_1 es recursivo? ¿Con L_2 pasaría los mismo? (julio 2010)

32. Sea la operación sobre lenguajes: $P(L_1, L_2) = \{w \in (a|b)^* / |w| = |x| + |y|; \ \ x \in L_1 \ \ \wedge \ \ y \in L_2\}$. Compruébese si es una operación cerrada sobre los lenguajes recursivos. (julio 2010)

33. Sean L y L$'$ dos lenguajes formales, sobre los cuales se calcula: $F(L, L') = \{x \in L / x^I \notin L'\}$. ¿Si L y L' son recursivos, $F(L, L')$ lo es? (junio 2011)

34. Sean $L \subseteq \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$. Se define la operación $INSERTA(a, L) = \{xay / xy \in L\}$. Estúdiese el cierre de esta operación dentro de los lenguajes recursivos y recursivamente enumerables. (junio 2011)

35. Considérese la siguiente operación sobre un lenguaje arbitrario: $P(L) = \left\{x \in \Sigma^* \ / \ \Sigma^{|x|} \cap L \neq \emptyset\right\}$. Compruébese si esta operación es cerrada sobre los lenguajes recursivos y recursivamente enumerables. (julio 2011)

36. Sean dos lenguajes recursivamente enumerables y disjuntos. Al compararlo con un tercero, del que se desconocen sus propiedades respecto a la Máquina de Turing, se sabe que su intersección con los dos lenguajes anteriores es no vacía. ¿Se podría asegurar, entonces, que este nuevo lenguaje es recursivamente enumerable? (julio 2011)