1. Introducción al análisis de algoritmos

1. **Introducción al concepto de algoritmia**
2. **Eficiencia de un algoritmo**
3. **Notación asintótica**
4. **Reglas generales**

Bibliografía

- **Básica:**
  - **Aho, Hopcroft y Ullman, capítulo 1**
  - **Weiss, 95; capítulo 2**
- **Avanzada**
  - **Brassard y Bratley, 97; capítulos 2-4**
  - **Knuth, 86 (Volumen 1); capítulo 1**

1. 1. Introducción al concepto de algoritmia

Definición: Campo que estudia el análisis y diseño de algoritmos

- ¿Es realmente importante estudiar los algoritmos?
- ¿Qué hemos estudiado hasta ahora?
  - Fundamentos de programación
  - Realizar programas correctos
- ¿Es suficiente realizar “programas” correctos?

  Ejemplos:
  - calcular el mínimo de tres números: número de comparaciones / asignaciones
    - ¿y si va dentro de un bucle que se repite N veces?
  - búsqueda secuencial vs dicotómica en vectores ordenados
    - tamaño 100, 1000, 10000,... → nº medio comparacones N/2 vs $\log_2 N$
  - repetir operaciones de forma innecesaria

1. 1. Introducción al concepto de algoritmia

¿Qué vamos a estudiar?

- Nuevas técnicas de diseño de algoritmos
- Análisis de la eficiencia de las distintas soluciones

¿Cómo podemos saber si un algoritmo es eficiente?

- Enfoque empírico
- Enfoque teórico, con independencia de ordenadores concretos

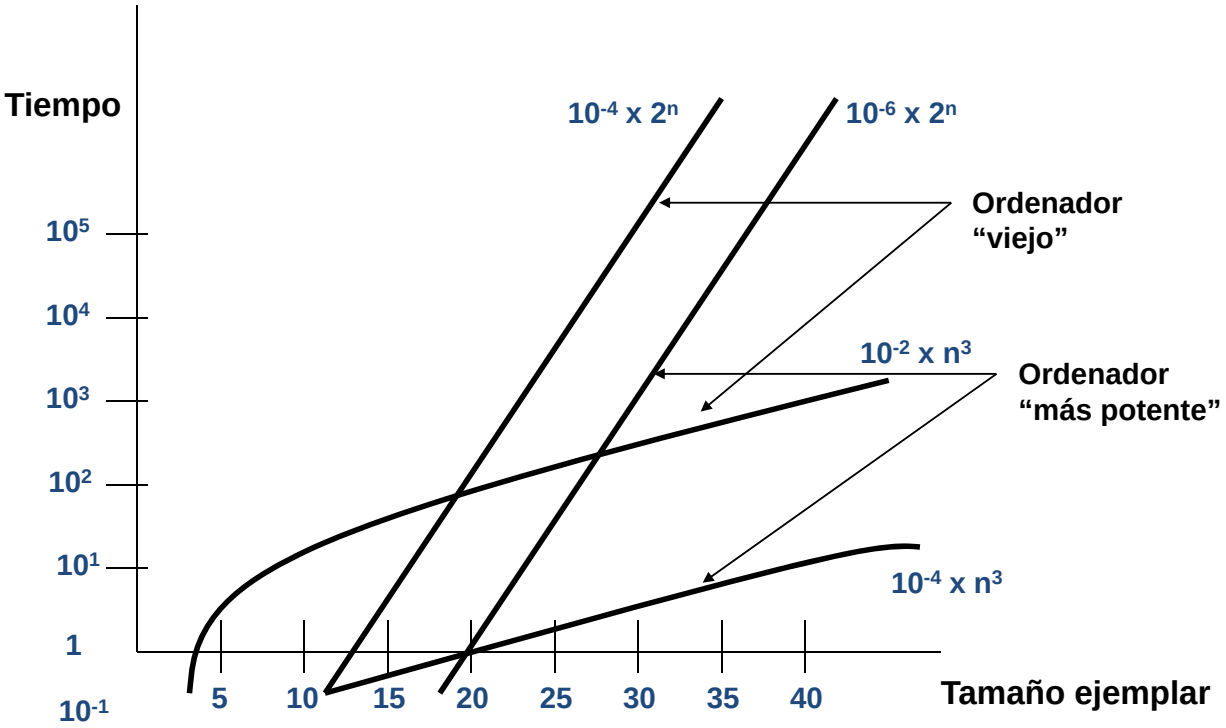
¿Comparar dos versiones de un algoritmo?

- Consumo de tiempo / memoria de procesador
- El tamaño de los ejemplares sí importa

¿Todo se soluciona con un ordenador más potente?

Algoritmia vs *hardware*

Solución exponencial, 2^n, vs Solución polinómica, n^3



Evolución de las dos soluciones

n/seg.	1	3	5	10	20	30
n^3	1	27	125	1000	8000	27.000
2^n	2	8	32	1024	1.048.576	1.073.741.824

Hay 86400“ en un día

8000” son 2,2 horas
1.048.576” aprox. 12,13 días

27.000” aprox. 7,5 horas
1.073.741.824” aprox 34 años

Sucesión de Fibonacci

	n	10	20	30	…	100
Iterativa:	0,16 ms	0,33 ms	0,5 ms	0,75 ms	...	5,5 ms
Recursiva:	8 ms	1s	2’	21 días	...	10^9 años

1. 2. Eficiencia de un algoritmo

- Cuándo es importante el
  - **Tiempo de ejecución**
    - Reservas on-line, disparo de alarmas,...
  - Mejor caso, caso promedio o peor caso
    - Alarmas (críticas) en centrales nucleares,
    - Análisis de la señal de un sismógrafo
  - **Consumo de memoria**
    - Manejo de bases de datos
    - Procesamiento de imágenes (p.e. de satélite)
    - Reconocimiento de patrones (cadenas de caracteres, voz)

1. 2. Eficiencia de un algoritmo

- ¿Sobre algún ordenador concreto/estándar? No
  - Usaremos un **Modelo**:
    - Ordenador secuencial
    - Repertorio estándar de operaciones (sencillas): asignación, comparación, operadores aritméticos,...
    - Todas las operaciones sencillas tienen el mismo coste
    - Capacidad de memoria infinita

Ejemplo 1:

- distintos tamaños,
- distintas instrucciones,
- distintos tiempos de respuesta.

1. 2. Eficiencia de un algoritmo

- Concepto de **eficiencia** será función de
  - **Tiempo de ejecución**, que es función de las operaciones elementales

    Ejemplo 2: búsqueda secuencial vs dicotómica
  - **Tamaño de los ejemplares** (memoria/representación)

    Ejemplo 3: términos de la serie de Fibonacci

- Ambos factores están relacionados
  - Un ejemplar de tamaño o valor grande puede hacer que una operación no sea elemental, que no pueda representarse,...
  - Una solución recursiva o ineficiente puede consumir muchos recursos

1. 3. Notación asintótica

- **t(n)**: $\aleph \rightarrow \Re^+$
  recursos (tiempo/espacio) que consume un algoritmo para solucionar un ejemplar de tamaño **n**
- **Principio de Invarianza**
  - Dos implementaciones distintas de un mismo algoritmo no diferirán más que en alguna constante multiplicativa
- **Notación asintótica**:
  concerniente al funcionamiento (tiempo de ejecución/número de instrucciones ejecutadas) de los algoritmos en casos límite (para ejemplares suficientemente grandes)

1. 3. 1. Notación *O():* en el / del orden de

- *f(n)* y *g(n)* dos funciones monótonas crecientes
- $n, n_0 \in Z^+$
- $c \in \Re^+$

Conjunto de cotas superiores: *O(·)*

$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow \exists\, c>0, n_0 > 0: \forall\, n > n_0: f(n) \leq c \cdot g(n)$

(¡¡cuidado con las constantes multiplicativas!!)

Notaciones más usadas

- *log n, logarítmica*
- *n, lineal*
- n^2, *cuadrática*
- n^3, *cúbica*
- n^k, *polinómica*
- 2^n, *exponencial*
- *n!, factorial*

Expresiones útiles:

- $f(n) \in O(f(n))$
- $O(f(n)) + O(g(n)) \equiv O(f(n)+ g(n)) \equiv O(máx(f(n), g(n)))$
- $k \cdot O(f(n)) \equiv O(k \cdot f(n)) \equiv O(f(n))$
- $O(f(n)) \cdot O(g(n)) \equiv O(f(n) \cdot g(n))$
- $O(a_0+a_1 \cdot n + ... + a_d \cdot n^d) \in O(n^d)$

1. 3. 2. Notaciones Ω() y Θ()

Conjunto de cotas inferiores: $\Omega(\cdot)$

$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists c>0, n_0 > 0: \forall n > n_0: f(n) \geq c \cdot g(n)$

Conjunto de cotas estrictas: $\Theta(\cdot)$

$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ y $f(n) \in \Omega(g(n))$

Jerarquías

- $O(1) \subset O(lg\ n) \subset O(n^{1/2}) \subset O(n) \subset O(n \cdot lg\ n) \subset O(n^2) \subset O(2^n) \subset O(n!)$
- $\Omega(1) \supset \Omega(lg\ n) \supset \Omega(n^{1/2}) \supset \Omega(n) \supset \Omega(n \cdot lg\ n) \supset \Omega(n^2) \supset \Omega(2^n) \supset \Omega(n!)$
- $\Theta(1) \neq \Theta(lg\ n) \neq \Theta(n^{1/2}) \neq \Theta(n) \neq \Theta(n \cdot lg\ n) \neq \Theta(n^2) \neq \Theta(2^n) \neq \Theta(n!)$

1. 4. Reglas generales

- Secuencias
  $O(f(n)) + O(g(n)) \equiv O(f(n) + g(n)) \equiv O(\max(f(n), g(n)))$
- Anidamiento
  $O(f(n)) \cdot O(g(n)) \equiv O(f(n) \cdot g(n))$
- Bucles para
  $O(c \cdot n)$

```
Ej1: para i desde 1 hasta m hacer
        p(i)
     fin para
Ej2: para i desde 1 hasta m hacer
                para j desde i+1 hasta m hacer
                        intercambia(A(i,j), A(j,i));
                finpara
     finpara
```

1. 4. Reglas generales (cont.)

- Bucles mientras/repetir

```
inf := 1; sup := m;
mientras inf < sup hacer
     med := (inf + sup) div 2;
     si v(med) = x entonces
                inf := med;
                sup := med;
     sino
                si v(med) > x entonces
                        sup := med - 1;
                sino
                        inf := med;
                finsi
     finsi
fin mientras
```

- Esquemas recursivos