Lógica de Primer Orden

1 Introducción

El hecho de que las fórmulas atómicas representen proposiciones simples y no se pueda acceder a los elementos de la proposición, restringe la capacidad expresiva de la lógica proposicional.

La lógica de primer orden incluye el concepto de término, como componente de las fórmulas atómicas, que hace referencia a los elementos que forman parte de las proposiciones simples.

Considerar las sentencias:

"Confucio es un hombre."
"Todos los hombres son mortales."

La inferencia trivial "Confucio es mortal" puede realizarse en la lógica de primer orden, pero no en la lógica proposicional.

2 Lenguaje de la lógica de primer orden

2.1 Sintaxis

Los símbolos básicos a partir de los cuales se construyen las fórmulas del lenguaje son:

Símbolos de Constantes:	A, B, C,... , Arbol, Luis.
Símbolos de Funciones:	f, g, h, ... , suma, resta. Cada símbolo de función tiene asociado un entero (>1) denominado grado o aridad, que indica cuantos argumentos tomará el símbolo de función.
Símbolos de predicado:	P, Q, R, ... , COLOR, PADRE Los símbolos de predicado también tienen asociado un grado o aridad.
Símbolos de variable:	x, y, z, x_1, y_1, z_1, ... (contable)
Conectores Lógicos:	$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, $\supset$
Cuantificadores:	$\forall$, cuantificador universal, para todo. $\exists$, cuantificador existencial, existe.
Símbolos Auxiliares:	(,), ,

Def. 2.1.1 Vocabulario, W[1].

Un vocabulario, W, es una cuádrupla <C, F, P, d> donde
C: conjunto finito de símbolos de constantes
F: conjunto finito de símbolos de función
P: conjunto finito de símbolos de predicado
d: función grado o aridad; d: $F \cup P$ ---> {1, 2, 3 , ...}
con la restricción de que C, F y P son disjuntos dos a dos. Supondremos, además, que no contienen símbolos de variable, conectores, cuantificadores, ni símbolos auxiliares.

[1] Una definición más adecuada es W=<F, P, d>, de modo que los símbolos de constante se consideran símbolos de función de grado 0. Además, F y P son contables.

Def. 2.1.2 Términos.

Se denominan términos de un vocabulario, W, a las siguientes expresiones:

- símbolos de constantes (constantes)
- símbolos de variable (variable)
- $g(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, donde g es un símbolo de función de grado n y $t_1, t_2, \ldots, t_n$, son términos.

Los términos denotarán objetos:

A	constante	referencia a un elemento especifico, siempre el mismo
x	variable	referencia a un elemento especifico, según el contexto
g(A, B)	función	referencia a un elemento especifico, de forma indirecta

Def. 2.1.3 Fórmulas Atómicas o Átomos.

Las fórmulas atómicas son expresiones de la forma $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, siendo P un símbolo de predicado de grado n y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ términos.

Las fórmulas atómicas expresen relaciones entre los objetos que denotan sus términos:

JEFE(Pedro, Luis)	Pedro es el jefe de Luis
RESPETA(Luis, madre(Luis))	Luis respeta a su madre

Def. 2.1.4 Fórmula Bien Formada (FBF).

Las FBF's se definen inductivamente por:

1. Una formula Atómica es una FBF.
2. Si α es una FBF, $(\neg\alpha)$ es una FBF.
3. Si α y β son FBF's $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \supset \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ son FBF's .
4. Si α es una FBF, $(\forall x\alpha)$ y $(\exists x\alpha)$ son FBF
5. El conjunto de FBF's es el cierre transitivo del conjunto de fórmulas atómicas con las leyes 1), 2), 3) y 4)

Conjunto de FBF's: Lenguaje de primer orden sobre W: L^1_W (L^1 si W fijo).

EL uso de los paréntesis se puede reducir con los convenios:

asociatividad: de izquierda a derecha

prioridad: $\leftrightarrow, \supset, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$

Def. 2.1.5 Cuantificadores y Alcance.

Sea la FBF $Qx\alpha$, con Q uno de $\forall$ o $\exists$. Se denominan:

cuantificador (sobre x): Qx

alcance del cuantificador: α

Def 2.1.6 Ocurrencias libre y ligadas de una variable.

Una ocurrencia de una variable, x, está ligada sii
es la ocurrencia del cuantificador, o
está en el alcance de un cuantificador sobre x

Una ocurrencia de una variable, x, es libre, sii no está ligada.

2.2 Semántica

Def. 2.2.1 Interpretación.

Una interpretación, I, de un vocabulario, W, consiste en un par (D, f_I) siendo D el dominio o universo de discurso y f_I una función de interpretación.

f_I se define por:

Si A es un símbolo de constante $f_I(A)=A^I \in D$
Si x es un símbolo de variable $f_I(x)=x^I \in D$
Si g es un símbolo de función con d(g)=n, $f_I(g)=g^I$ siendo g^I una función g^I:K ---> D y $K \subset D^n$
Si P es un símbolo de predicado con d(P)=n, $f_I(P)=P^I$ siendo P^I una relación y $P^I \subset D^n$

Def 2.2.2 Evaluación de términos y fórmulas atómicas.

A partir de I, se define de forma única una función de evaluación de términos y fórmulas atómicas V_t de la siguiente forma:

- términos
  Si A es un símbolo de constante $V_t\ (A) = f_I(A) = A^I \in D$
  Si x es un símbolo de variable $V_t\ (x) = f_I(x) = x^I \in D$
  Si g es un símbolo de función con d(g) = n, $t_1, t_2 \dots, t_n$ términos,
  $V_t\ (g=(t_1, t_2 \dots, t_n)) = g^I\ (V_t(t_1), V_t(t_2) \dots, V_t(t_n)) \in D$
- fórmulas atómicas
  Si $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica,
  $V_t(P(t_1, t_2, \dots, t_n))=$ T si $(V_t(t_1), V_t(t_2) \dots, V_t(t_n)) \in P^I$; F si $(V_t(t_1), V_t(t_2) \dots, V_t(t_n)) \notin P^I$

Def. 2.2.3 Interpretación modificada.[2]

Sea I:(D, f_I) una interpretación y x una variable. La interpretación modificada $<x\leftarrow d>I$ es el par (D, $<x\leftarrow d>f_I$), con $<x\leftarrow d>f_I$ definida por:

Si A es una constante $<x\leftarrow d>f_I(A) = f_I(A)$
Si y es un símbolo de variable, $y \neq x$, $<x\leftarrow d>f_I(y) = f_I(y)$
Para la variable x, $<x\leftarrow d>f_I(x) = d \in D$
Si g es un símbolo de función con d(g) = n, $<x\leftarrow d>f_I(g) = f_I(g)$
Si P es un símbolo de predicado con d(P) = n, $<x\leftarrow d>f_I(P) = f_I(P)$

Def. 2.2.4 Evaluación de términos y fórmulas atómicas modificada.

A partir de una interpretación modificada $<x\leftarrow d>I$, se define de forma única una función de evaluación de términos y fórmulas atómicas modificada $<x\leftarrow d>V_t$ de la siguiente forma:

[2] De manera similar se definen las interpretaciones múltiplemente modificadas.
$<x_1\leftarrow d_1><x_2\leftarrow d_2>\dots <x_n\leftarrow d_n>I \equiv <x_1\leftarrow d_1>(<x_2\leftarrow d_2>(\dots (<x_n\leftarrow d_n>I))\dots)$
$<x\leftarrow d><x\leftarrow e>I \equiv <x\leftarrow d>(<x\leftarrow e>I) \equiv <x\leftarrow d>I$

- términos
  - Si A es una constante $<x \leftarrow d>V_t(A) = V_t(A)$
  - Si y es un símbolo de variable, $y \neq x$, $<x \leftarrow d>V_t(y) = V_t(y)$
  - Si x es un símbolo de variable, $<x \leftarrow d>V_t(x) = d \in D$
  - Si g es un símbolo de función con $d(g) = n$, $t_1, t_2 \ldots, t_n$ términos,
    $<x \leftarrow d>V_t\ (g=(t_1, t_2 \ldots, t_n)) = g^I(<x \leftarrow d>V_t(t_1), <x \leftarrow d>V_t(t_2) \ldots, <x \leftarrow d>V_t(t_n)) \in D$
- fórmulas atómicas
  - Si $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica,
    $<x \leftarrow d>V_t(P(t_1, t_2, \ldots, t_n))=$ T si $(<x \leftarrow d>V_t(t_1), <x \leftarrow d>V_t(t_2) \ldots, <x \leftarrow d>V_t(t_n)) \in P^I$
    F si $(<x \leftarrow d>V_t(t_1), <x \leftarrow d>V_t(t_2) \ldots, <x \leftarrow d>V_t(t_n)) \notin P^I$

Def. 2.2.5 Evaluación de FBF's.[3]

Sea I una interpretación de un vocabulario W, y V_t una función de valuación de términos y fórmulas atómicas. A partir de V_t se define de forma única una función de evaluación de FBS's , V, de la siguiente forma:

1. Si α es un átomo, $V(\alpha) = V_t(\alpha)$
2. Si α es una FBF, $V(\neg\alpha)$: T si $V(\alpha)$= F; F si $V(\alpha)$= T
3. Si α y β son FBF's,
   $V(\alpha \wedge \beta)$= T si $V(\alpha)=V(\beta)$=T; F en otro caso
   $V(\alpha \vee \beta)$= F si $V(\alpha)=V(\beta)$=F; T en otro caso
   $V(\alpha \supset \beta)$= F si $V(\alpha)$=T y $V(\beta)$=F; T en otro caso
   $V(\alpha \leftrightarrow \beta)$= T si $V(\alpha)=V(\beta)$; T en otro caso
4. Si α es una FBF, $V(\forall x\alpha)$: T si $<x \leftarrow d>V(\alpha)$ = T para todo $d \in D$; F en otro caso
5. Si α es una FBF, $V(\exists x\alpha)$: T si $<x \leftarrow d>V(\alpha)$ = T para algún $d \in D$; F en otro caso

Se dice que α es cierta bajo I, o que I satisface α sii $V(\alpha)$= T, donde V se define a partir de I según def. 2.2.5. En caso contrario, se dice que α es falsa bajo I

Def. 2.2.6 Sentencia o fórmula cerrada

Se denomina sentencia a una FBF en la que no hay ocurrencias de variables libres.

Lema 1

Sea $\alpha(x)$ una FBF en la que ocurre x como variable libre, $\beta=Qx\alpha(x)$ e I una interpretación.
$V(\beta)$ no depende de $f_I(x)$.

Lema 2

Sea α una FBF en la que no hay ocurrencias libres de x e I una interpretación.
$V(\alpha)$ no depende de $f_I(x)$.

Lema 3

Si α es una sentencia e I una interpretación, $V(\alpha)$ no depende de los valores que f_I asigne a las variables.

---

[3] Por brevedad, se omite la definición de función de evaluación modificada, aunque se emplea en la propia definición. La definición comenzaría:

1. Si α es un átomo, $<x \leftarrow d>V(\alpha) = <x \leftarrow d>V_t(\alpha)$
2. Si α es una FBF, $<x \leftarrow d>V(\neg\alpha)$: T si $<x \leftarrow d>V(\alpha)$= F; F si $<x \leftarrow d>V(\alpha)$= T
3. Si α y β son FBF's,
   $<x \leftarrow d>V(\alpha \wedge \beta)$= T si $<x \leftarrow d>V(\alpha)=<x \leftarrow d>V(\beta)$=T; F en otro caso

3 Modelo, Consistencia, Validez y Satisfacibilidad.

3.1 Modelo, Consistencia y Validez

Def 3.1.1 Modelo.

Una interpretación, I, es un modelo de una sentencia, α, sii $V(\alpha)=T$
Una interpretación, I, es un modelo de un conjunto finito de sentencias, $\Omega=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ sii I es un modelo de todo $\alpha_i \in \Omega$.

Def 3.1.2 Consistencia.

Una sentencia, α, es consistente o satisfacible sii tiene un modelo.
Un conjunto finito de sentencias, Ω, es consistente o satisfacible sii tiene un modelo.

$\alpha \equiv \forall x P(x)$ es consistente.

Def 3.3 Inconsistencia.

Una sentencia, α, es inconsistente o insatisfacible sii no es consistente.
Un conjunto finito de sentencias, Ω, es consistente o satisfacible sii no es consistente.

$\beta \equiv \forall x(P(x) \wedge \neg P(x))$ es inconsistente

Def. 3.1.4 Validez.

Una sentencia, α, es válida o tautológica sii α es cierta bajo todas las interpretaciones I de W.

$\gamma \equiv \forall x P(x) \supset P(A)$ es válida
$\eta \equiv \exists x(P(x) \vee \neg P(x))$ es válida

3.2 Satisfacibilidad

Def. 3.2.1 Lógica semi-decidible.

Una lógica es semi-decidible si el problema de la satisfacibilidad no es computable en dicha lógica, pero podemos dar un procedimiento de cómputo que para cualquier conjunto finito de sentencias inconsistente, termine indicando su inconsistencia. Nótese que no se garantiza que el procedimiento termine para cualquier conjunto finito de sentencias.

La lógica de primer orden es semi-decidible.

En la práctica, dado cualquier procedimiento para determinar la inconsistencia de un conjunto finito de sentencias, este puede:
1. Terminar normalmente (teóricamente parar), indicando la consistencia o inconsistencia
2. Terminación por consumo de recursos, y el conjunto de sentencias puede ser
   2.1. Inconsistentes, pero el procedimiento termina antes de comprobarlo por agotar los recursos asignados.
   2.2. Consistentes, pero el procedimiento termina por agotar los recursos asignados.

4 Equivalencia

def. 4.1 Equivalencia.

Dos sentencias α y β son equivalentes, y se denota por $\alpha = \beta$, sii α y β tienen los mismos valores de verdad bajo cualquier interpretación I del vocabulario W.

4.1 Leyes de equivalencia

Denotamos por α,β y γ FBF's; por δ una FBF en la que no hay ocurrencias libres de x; por $\square$ una FBF inconsistente; por$\blacksquare$ una FBF válida.

1	$(\alpha \leftrightarrow \beta) = (\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$	Eliminación del bí-condicional
2	$(\alpha \supset \beta) = (\neg\alpha \vee \beta)$	Eliminación del condicional
3	$(\alpha \wedge \beta) = (\beta \wedge \alpha)$ $(\alpha \vee \beta) = (\beta \vee \alpha)$	Conmutativa
4	$((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) = (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))$	Asociativa
5	$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) = ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \beta))$ $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) = ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \beta))$	Distributiva $\vee$ respecto $\wedge$
6	$(\alpha \wedge \blacksquare) = \alpha$ $(\alpha \vee \square) = \alpha$	Absorción
7	$(\alpha \wedge \neg\alpha) = \square$ $(\alpha \wedge \square) = \square$	Contradicción
8	$(\alpha \vee \neg\alpha) = \blacksquare$ $(\alpha \vee \blacksquare) = \blacksquare$	Exclusión de los medios
9	$(\alpha \wedge \alpha) = \alpha$ $(\alpha \vee \alpha) = \alpha$	Idempotencia
10	$\neg(\neg\alpha) = \alpha$	Doble negación
11	$\neg(\alpha \wedge \beta) = \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \vee \beta) = \neg\alpha \wedge \neg\beta$	De Morgan
12	$\delta \wedge Qx\alpha(x) = Qx(\delta \wedge \alpha(x))$ $\delta \vee Qx\alpha(x) = Qx(\delta \vee \alpha(x))$	
13	$\neg\forall\alpha(x) = \exists\neg\alpha(x)$ $\neg\exists\alpha(x) = \forall\neg\alpha(x)$	De Morgan cuantificadores
14	$\forall x(\alpha(x) \wedge \beta(x)) = \forall x\alpha(x) \wedge \forall\beta(x)$ $\exists x(\alpha(x) \vee \beta(x)) = \exists x\alpha(x) \vee \exists\beta(x)$	Distributiva $\wedge$, $\forall$ $\vee$, $\exists$

Lema 4

Sean α, β, γ, γ' FBF's con $\alpha = \beta$ y α ocurre en γ. Sea γ' FBF obtenida a partir de γ reemplazando todas las ocurrencias de α por β.
γ y γ' son equivalentes.

Lema 5

Sea $\alpha(x)$ FBF en la que hay ocurrencias libres de x. Sea y una variable que no ocurre en $\alpha(x)$. Sea $\alpha(y)$ la FBF que se obtiene a partir de $\alpha(x)$ reemplazando todas las ocurrencias libres de x por y
$Qx\alpha(x) = Qy\alpha(y)$.

Lema 6

Sea α una sentencia en la que hay ocurrencias de x pero no de y. Sea α' la sentencia obtenida reemplazando todas las ocurrencias de x en algún cuantificador y su alcance por y.
α y α' son equivalentes.

$$\forall x(\exists yP(x, y) \wedge \exists yQ(x, y)) = \forall x(\exists uP(x, u) \wedge \exists yQ(x, y)) =$$
$$= \forall z(\exists uP(z, u) \wedge \exists yQ(z, y)) = \forall z\exists u\, \exists y\, (P(z, u) \wedge Q(z, y))$$

5 Consecuencia lógica

Def. 5.1 Consecuencia Lógica.

Sean α, α_1, α_2, ... , α_n sentencias. Se dice que α es una consecuencia lógica de las premisas α_1, α_2, ... , α_n y se denota por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \alpha$ sii todo modelo de $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ es un modelo de α.

Sea Ω un conjunto finito de sentencias. Se dice que α es una consecuencia lógica de Ω, y se denota $\Omega \models \alpha$, sii α es una consecuencia lógica de una secuencia de formulas de Ω.

$$\alpha_1 \equiv \forall x(P(x) \supset R(x)) \qquad \alpha_2 \equiv P(A) \qquad \alpha \equiv R(A) \qquad \alpha_1, \alpha_2 \models \alpha$$

Teorema de Refutación

Sean α, α_1, α_2, ... , α_n sentencias. Las siguientes expresiones son equivalentes
1. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \alpha$
2. $((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \supset \alpha)$ es una tautología
3. $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\alpha)$ es inconsistente

La demostración es sencilla procediendo, por ejemplo, 3) $\Rightarrow$2) $\Rightarrow$1) $\Rightarrow$3).

Interés del teorema: 3) nos proporciona un método para comprobar si una fórmula es consecuencia lógica de unas premisas (métodos de demostración por refutación).

6 Reglas de inferencia

Son reglas de manipulación sintáctica que permiten generar nuevas fórmulas a partir de unas fórmulas dadas.

Def 6.1 Patrón de FBF.

Esquema de FBF que consta de ocurrencias de conectores lógicos, símbolos auxiliares y variables cuyo rango es el conjunto de FBF's.

A partir de un esquema de FBF se obtienen FBF's reemplazando las variables por FBF's.

patrón: $\alpha \supset (\beta \wedge \alpha)$ FBF's: $P(x) \supset (R(x) \wedge P(x))$ $\forall yP(y) \supset (R(x) \wedge \forall y\, P(y))$

Def 6.2 Regla de inferencia.

Se denomina regla de inferencia a la estructura *antecedente* $\rightarrow$ *consecuente*, donde
antecedente o premisas: secuencia de patrones de FBF
consecuente: secuencia de patrones de FBF

Dado un conjunto finito de FBF's, Ω, una regla de inferencia
se puede aplicar si los patrones del antecedente se pueden particularizar a formulas de Ω.
su efecto es obtener las FBF's resultantes de particularizar el consecuente.

Def. 6.3 Regla de inferencia sólida

Una regla de inferencia es sólida sii las fórmulas que permite generar son consecuencia lógica de las fórmulas sobre las que se aplica,

6.1 Reglas de inferencia más comunes.

Modus Ponens: $\alpha \supset \beta,\ \alpha \rightarrow \beta$
Modus Tollens: $\alpha \supset \beta,\ \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$
Abducción: $\alpha \supset \beta,\ \beta \rightarrow \alpha$
Eliminación And: $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha, \beta$
Introducción And: $\alpha, \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$

Instanciación Universal: $\forall x\alpha \rightarrow \beta$
donde β se obtiene reemplazando las ocurrencias libres de x en α por un término t que sea libre respecto a x en α[4]
un término t es libre respecto a la variable x en α sii x no ocurre, en α, en el alcance de un cuantificador de una variable de t, salvo, quizás, la propia x.

$\alpha \equiv \forall x(P(x) \supset R(x))$
$\beta \equiv P(A)$
a partir de α, IU: $\gamma \equiv P(A) \supset R(A)$
a partir de β, γ, MP se obtiene R(A)

6.2 Teoría.

Def. 6.2.1 Derivación[5]

Sea Ω un conjunto finito de FBF's, R una conjunto finito de reglas de inferencia y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$ una secuencia de FBF's.

Se dice que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$ es una derivación de α a partir de Ω usando R sii para todo α_i de la secuencia,
ó $\alpha_i \in \Omega$
ó existen fórmulas previas de la secuencia y una regla de R que permiten generar α_i.

La existencia de una prueba se denota por $\Omega \vdash_R \alpha$

[4] Estas restricciones evitan que a partir de la fórmula $\forall y \exists z ODIA(y,z)$ la aplicación de la regla de inferencia de IU genere la fórmula $\exists z ODIA(madre(z),z)$ pues madre(z) no es libre respecto a la variable y en la fórmula original.
[5] Esta definición de derivación es más débil que el de prueba formal, que también contempla la posibilidad de que las fórmulas de la secuencia se obtengan a partir de axiomas lógicos. Cuando el conjunto de axiomas propios es vacío, ambos conceptos coinciden.

Def. 6.2.2 Axiomas Propios

Se denominan Axiomas Propios a un conjunto finito de FBF's consistente.

Def. 6.2.3 Teoría.

Sea L una lógica y AP axiomas propios de L.
Se denomina Teoría de Axiomas Propios AP sobre L al conjunto AP. La teoría se denota por $Th(AP)_L$.

Def. 6.2.4 Teorema.

Sea Th(AP) una teoría, t una FBF y R una conjunto de reglas de inferencia.
t es un teorema de Th(AP), usando R, si $Th(AP) \vdash_R t$

Def. 6.2.5 Teoría sólida.

Una teoría Th(AP) es sólida sii todos sus teoremas son consecuencia lógica de AP.

Def. 6.2.6 Teoría completa.

Una teoría Th(AP) es completa sii todas las consecuencia lógica de AP son teoremas de la teoría.

7 Unificación

La unificación es un procedimiento que permite comprobar si dadas dos formulas, $\forall x\alpha$ y $\forall x\beta$, la regla de inferencia de instanciación universal permite obtener, respectivamente, las fórmulas α' y β' de modo que α' y β' sean sintácticamente iguales. Esta comprobación suele ser un paso previo a la aplicación de cualquier regla de inferencia.

7.1 Substituciones

Def. 7.1.1 Ligadura.

Sean t_i un termino y x_i una variable que no ocurra en t_i.
Se denomina ligadura al par ordenado t_i / x_i.

Las ligaduras se interpretan diciendo que el término t_i substituye las ocurrencias de la variable x_i.
La variable de la ligadura se dice que está ligada.

Def. 7.1.2 Substitución.

Se denomina substitución, s, a un conjunto finito de ligaduras $\{ t_1 / x_1, t_2 / x_2, \ldots , t_i / x_i\}$, con las restricciones:

$x_i \neq x_j$, para todo i, j
x_i no ocurre en t_j, para todo i, j

Def. 7.1.3 Expresión.

Una expresión es un término o una FBF.

Def. 7.1.4 Particularización por substitución.

Sean E una expresión y s una substitución.
Se denomina particularización por substitución de E mediante s (particularización) a la expresión obtenida reemplazando las variables de E que están ligadas en s por los términos de sus ligaduras

correspondientes. Si la particularización resultante no contiene variables, se denomina particularización básica.

E ≡ P(x, f(y), B)   s = {z/x, w/y}   Es ≡ P(z, f(w), B)

Def. 7.1.5 Variante Alfabética.

Dos expresiones son variantes alfabéticas sii solo se diferencian en el nombre de las variables.

E y Es en el ejemplo anterior son variantes alfabéticas.

Def 7.1.6 Substituciones distintas.

Sean s1 y s2 substituciones.
Se dice que s2 es distinta de s1 sii ninguna variable ligada de s1 ocurre en s2.

s1 = {f(x, y)/w}   s2={A/x, B/y, C/z}
s2 es distinta de s1, pues w no ocurre en s1
s1 no es distinta de s2

Def 7.1.7 Composición de substituciones.

Sea s2 una substitución distinta de s1.
Se denomina composición de s2 con s1 y se denota s1s2 a la substitución obtenida:

1. aplicando s2 a los términos de s1
2. añadiendo al conjunto resultante las ligaduras de s2

s1 = {f(x, y)/w}   s2={A/x, B/y, C/z}
s1s2 = {f(A, B)/w, A/x, B/y, C/z}
s2s1 no está definida

7.2 Unificador más general.

Def. 7.2.1 Particularización por substitución de un conjunto de expresiones.

Sea Ω={E_1, E_2, ... ,E_n} un conjunto finito de expresiones y s una substitución.
Se define la particularización de Ω por s, Ωs, al conjunto resultante de aplicar s a cada $E_i \in \Omega$, eliminando las particularizaciones repetidas.

Def. 7.2.2 Unificador.

Sean Ω un conjunto finito y no vacío de expresiones y s una substitución.
s es un unificador de Ω sii Ωs tiene un único elemento. Se dice entonces que Ω es unificable.

Ω = {P(A, y, z), P(x, B, z)}   s={A/x, B/y, C/z}
Ωs = {P(A, B, C) } y Ω es unificable

Def. 7.2.3 Unificador más general.

Sean Ω un conjunto finito de expresiones y g un unificador de Ω.
Se dice que g es el unificador más general de Ω sii para cualquier otro unificador de Ω, s, existe una substitución, s', que verifica s = gs'

Ω = {P(A, y, z), P(x, B, z)}   s={A/x, B/y, C/z}
g={A/x, B/y}   s'= {C/z}   s=gs'

Teorema de unificación.

Sea Ω un conjunto finito de expresiones.
Si Ω es unificable , el unificador más general, g, existe y es único salvo variantes alfabéticas.

7.3 Algoritmo de unificación.

Def. 7.3.1 Conjunto de desacuerdos.

Sea Ω un conjunto finito y no vacío de expresiones.
El conjunto de desacuerdos, D, de Ω se obtiene localizando el primer símbolo por la izquierda en el que no todas las expresiones de Ω tienen el mismo símbolo, y extrayendo de cada expresión $E_i \in \Omega$ la subexpresión que comienza por el símbolo que ocupa dicha posición. El conjunto de desacuerdos, D, es el conjunto formado por estas subexpresiones.

Ω = {P(A, y, z)}, P(x, B, z), P(u, B, z)} D={A, x, u}

Algoritmo de unificación.

Entrada: conjunto finito y no vació de expresiones, Ω.
Salida: unificador más general de Ω o fallo si Ω no es unificable.

1. hacer k=0, $\Omega_k=\Omega$, $s_k=0$
2. Si Ω_k tiene más de un elemento, crear el conjunto de desacuerdos D_k de Ω_k; en caso contrario devolver s_k, umg de Ω.
3. Si no existen v_k, $t_k \in D_k$, tales que v_k no ocurra en t_k, devolver fallo (Ω no es unificable)
4. Elegir v_k, $t_k \in D_k$, tales que v_k no ocurra en t_k, hacer $s_{k+1}=s_k\{t_k/v_k\}$ y $\Omega_{k+1}= \Omega_k \{t_k/v_k\}$
5. hacer k=k+1 e ir a 2

Se puede demostrar que este algoritmo para, y que si Ω es unificable, el algoritmo encuentra su umg.