

Lógica de proposiciones (5)

Fundamentos de Informática I
I.T.I. Sistemas (2005-06)
© César Llamas Bello
Universidad de Valladolid

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

1

Índice

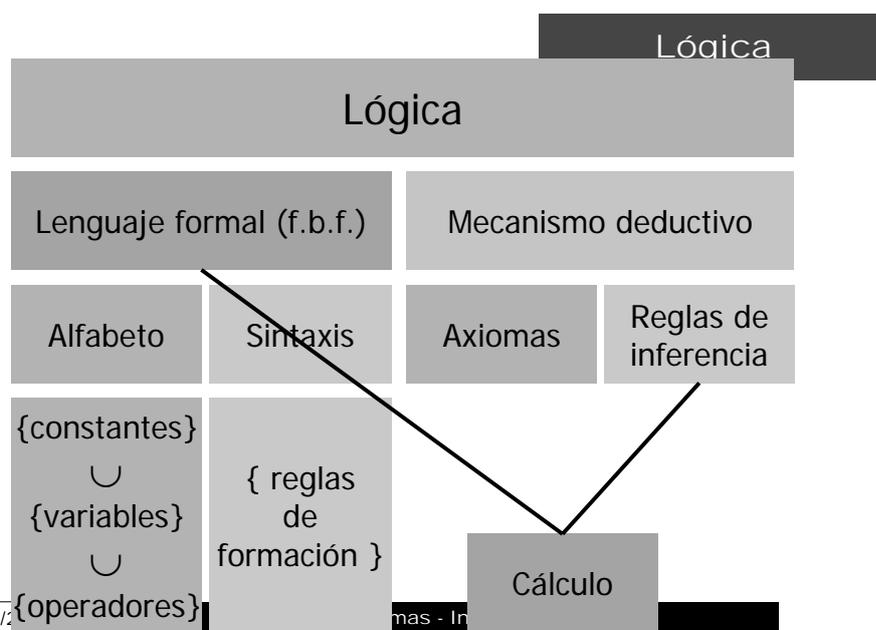
- Lógica
- Lógica proposicional ecuacional
- Lógica: semántica
- Semántica de la lógica proposicional
- Transcripción de oraciones a fórmulas
- Pequeña calculadora proposicional

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

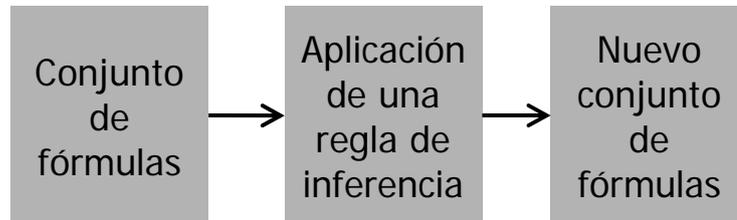
2

- La lógica es la primera forma de trabajo con símbolos
- Principalmente
 - razonamiento
 - modelado del conocimiento
 - representación del conocimiento
 - estudio de los procesos de deducción
(cómputación lógica)

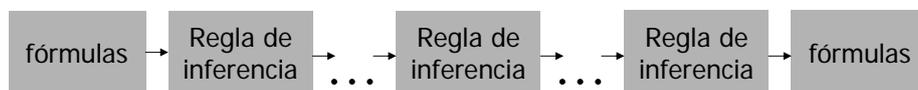


Demostración formal

Un paso de inferencia:



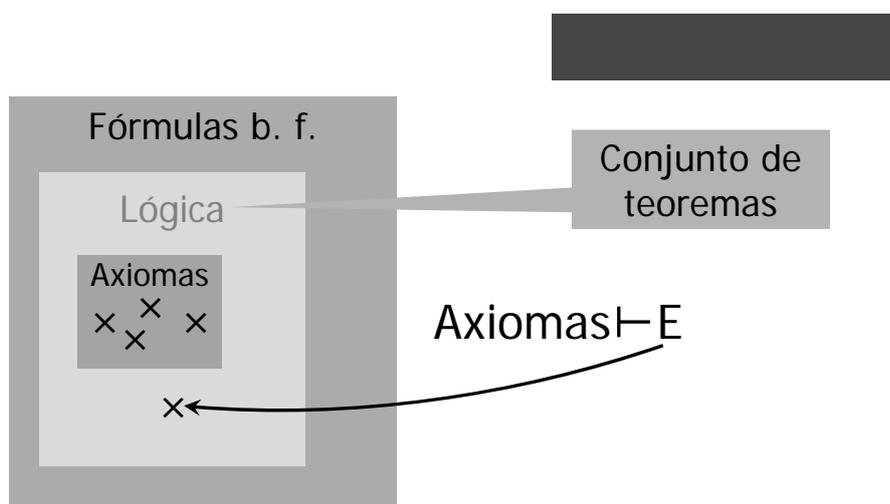
Una demostración:



13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

5



13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

6

- Para utilizar la lógica podemos:
 - Si somos unos usuarios normales podemos elegir
 - El conjunto de variables.
 - Además, si somos unos *gurus* de la lógica, podemos elegir:
 - El conjunto de reglas de inferencia
 - El conjunto de axiomas
 - Y si no estamos satisfechos, podemos elegir:
 - El conjunto de operadores
 - La sintaxis de la lógica.

Pequeño problemilla

- Pero antes de poder usar la lógica que necesitamos, debemos ...

comprobar que es consistente.

Es decir, que el aparato formal está bien construido.

- Sintaxis:
 - constantes {cierto, falso},
 - Variables para representar proposiciones simples
 - Operadores lógicos combinados al estilo aritmético habitual.
- Mecanismo deductivo:
 - Reglas de inferencia: Subs, Trans y Leib
 - Axiomas: Refl, Sim, (y algunos otros más)

- Los axiomas son fórmulas generales con variables y constantes.
- *Esquemata* : conjunto de axiomas de la lógica.

Operadores y su acepción habitual

conector	explicación
\neg	Negación u operador <i>no</i> (<i>not</i>)
\equiv	Equivalencia. También se escribe \Leftrightarrow
\equiv	Inequivalencia. También denominado <i>o exclusivo</i> (<i>xor</i>)
\wedge	Conjunción <i>o y lógico</i> (<i>and</i>)
\vee	Disyunción u <i>o lógico</i> (<i>or</i>)
\Rightarrow	Implicación material. Su expresión izquierda suele llamarse <i>antecedente</i> y su derecha <i>consecuente</i>
\Leftarrow	Consecuencia. Su expresión izquierda se suele denominar <i>consecuente</i> y su derecha <i>antecedente</i>

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

11

Esquemas de la lógica proposicional E

esquema	explicación
(Asoc- \equiv) $((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$	Asociatividad de \equiv
(Sim- \equiv) $p \equiv q \equiv q \equiv p$	Simetría de \equiv
(Id- \equiv) $T \equiv q \equiv q$	Identidad de \equiv
(Def- \perp) $\perp \equiv \neg T$	Definición de <i>falso</i> (\perp)
(Dis- \neg - \equiv) $\neg(p \equiv q) \equiv \neg p \equiv \neg q$	Distributividad de \neg sobre \equiv
(Def- \equiv) $(p \equiv q) \equiv \neg(p \equiv q)$	Definición de inequivalencia (\equiv)
(Sim- \vee) $p \vee q \equiv q \vee p$	Simetría de \vee
(Asoc- \vee) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Asociatividad de \vee
(Id- \vee) $p \vee p \equiv p$	Idempotencia de \vee
(Dis- \vee - \equiv) $p \vee (q \equiv r) \equiv p \vee q \equiv p \vee r$	Distributividad de \vee sobre \equiv
(ME) $p \vee \neg p$	Medio excluido
(R-Oro) $p \wedge q \equiv p \equiv q \equiv p \vee q$	Regla de oro
(Def- \Rightarrow) $p \Rightarrow q \equiv p \vee q \equiv q$	Definición de implicación (\Rightarrow)
(Def- \Leftarrow) $p \Leftarrow q \equiv q \Rightarrow p$	Definición de consecuencia (\Leftarrow)
(A-Leib) $(e = f) \Rightarrow (E_e^z = E_f^z)$	Axioma de Leibniz

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

12

1. Formulación del problema en términos de expresiones lógicas:

- Identificación de proposiciones lógicas elementales y asignación de variables: p, \dots
- Reescritura del problema en términos de variables y operadores lógicos: E, E_1, E_2, \dots

2. Adaptación a un esquema de *consecuencia lógica*:

- ¿Es cierto que E se sigue de E_1, E_2, \dots ?

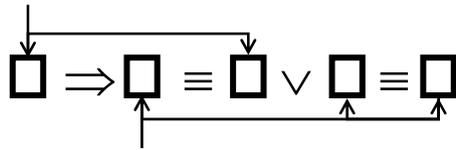
- ¿Es cierto que E se sigue de E_1, E_2, \dots ?
Consiste en averiguar si

$$\Phi := ((E_1 \wedge \dots \wedge E_n) \Rightarrow E)$$

es teorema, es decir, si $S \vdash \Phi$

Substitución aplicada a un axioma

$$p \Rightarrow q \equiv p \vee q \equiv q$$



$$r \Rightarrow s \equiv r \vee s \equiv s$$

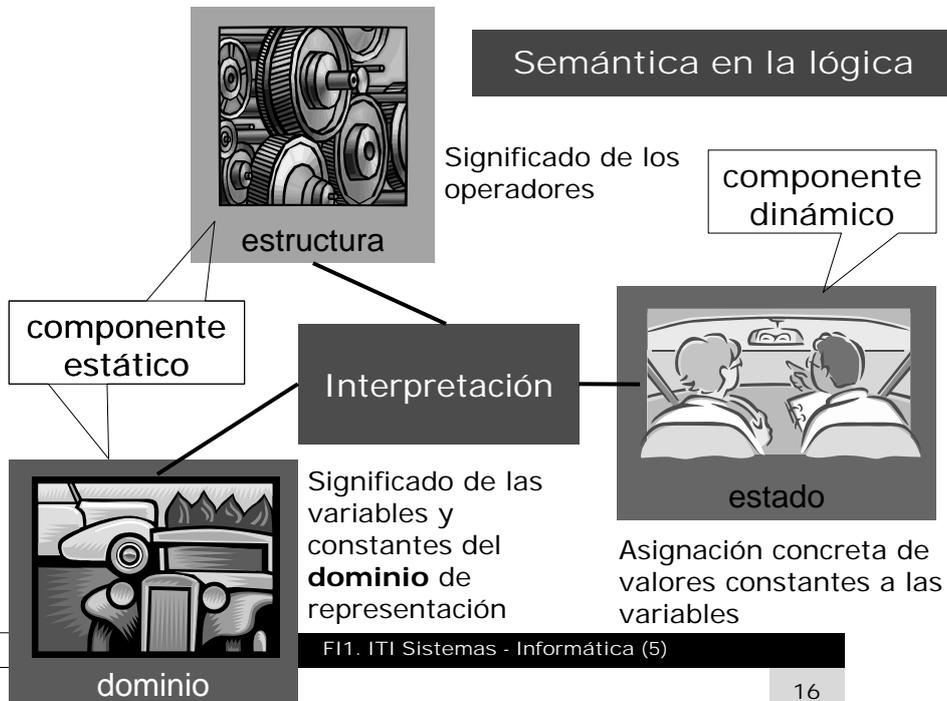
$$(p \equiv T) \Rightarrow (\neg p \wedge q) \equiv (p \equiv T) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (\neg p \wedge q)$$

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

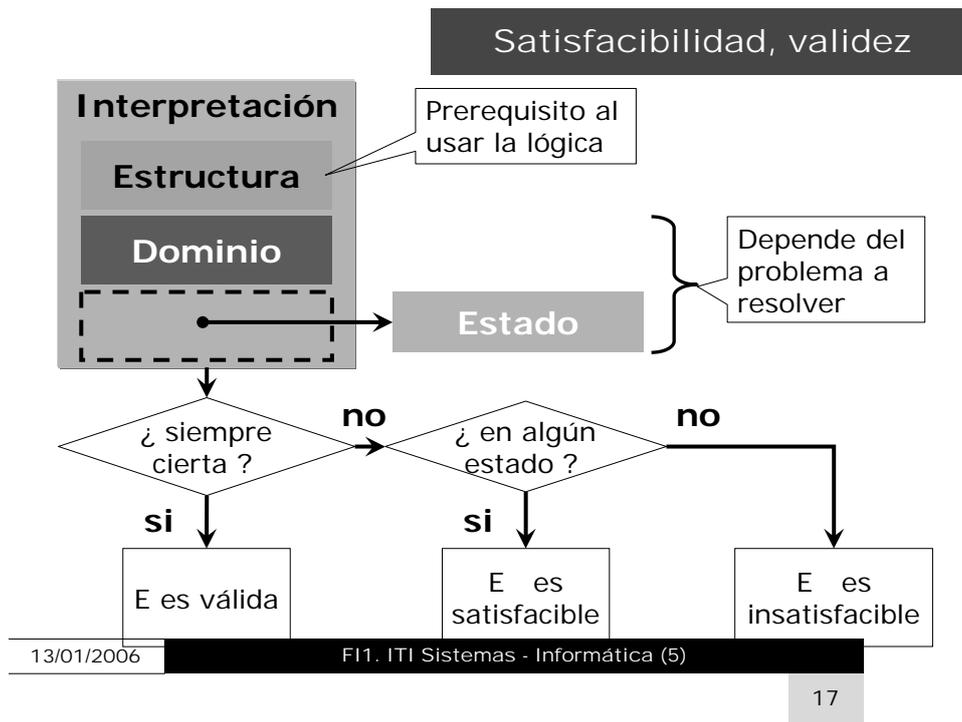
15

Semántica en la lógica



FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

16



Para cierta estructura:

Modelo

- I (interpretación) **modela S** (formulas) si cada fórmula es válida en I:
 “**I es un modelo de S**”
 - **M modela la lógica** si y solo si cada teorema es válido en M:
 “**M es un modelo de la lógica**”
- En una lógica sólida cualquier teorema es válido (dada una estructura).
 - En una lógica completa cada expresión válida es un teorema

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

18

Conceptos importantes

- Consistente (coherente)
- Sólido (bien fundado, *soundness*)
- Completo

- Estructura estándar

- Procedimiento de decisión
- Decidible (semidecidible)

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

19

Procesos informáticos

- En un proceso se manipulan entidades simbólicas (carácter “sintáctico”)
- En una especificación se dan las propiedades de los parámetros y de la solución (carácter “semántico”)
- Conceptos importantes:
 - Solidez,
 - Completitud,
 - (proceso engendrado por un programa correcto)

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

20

Estructura estándar de la lógica proposicional

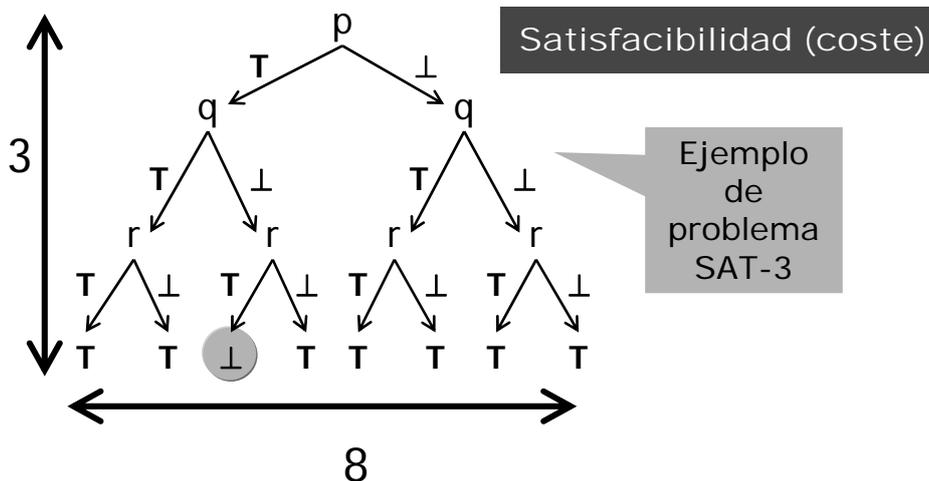
conector	significado
\neg	Invierte el valor de verdad de su argumento
\equiv	T si ambos valores son iguales. \perp de otro modo
\equiv	T si ambos valores son distintos. \perp de otro modo
\wedge	T si y sólo si ambos operandos son T
\vee	T si y sólo si algún operando es T
\Rightarrow	\perp si y sólo si el antecedente es T y el consecuente \perp
\Leftarrow	\perp si y sólo si el antecedente es T y el consecuente \perp

a	b	$\neg a$	$a \vee b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftarrow b$	$a \equiv b$	$a \wedge b$	$a \neq b$
T	T	\perp	T	T	T	T	T	\perp
T	\perp	\perp	T	\perp	T	\perp	\perp	T
\perp	T	T	T	T	\perp	\perp	\perp	T
\perp	\perp	T	\perp	T	T	T	\perp	\perp

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

21



- El problema SAT requiere, en el peor de los casos, un esfuerzo exponencial.

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

22

Elementos eliminados

- No estudiaremos Metateorema de la Dualidad
(aunque figuren ejercicios en la hoja de problemas)
- No estudiaremos transcripción de oraciones a fórmulas
(aunque también puede haber ejercicios)

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

23

Resumen de la lógica E

- Es consistente.
- Es sólida y completa (con la estructura estándar).
- Es decidible.

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

24

Dualidad

Dualidad

- El dual de P (P_D) se obtiene intercambiando las apariciones de:
 - T y \perp , \wedge y \vee , \equiv y \neq , \Rightarrow y \Leftarrow , \Leftarrow y \Rightarrow .

P	P_D
$p \vee q$	$p \wedge q$
$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$
$p \equiv \neg q$	$p \neq \neg q$
$\perp \neq T \vee p$	$T \equiv \perp \wedge p$
$\neg p \wedge \neg q \equiv r$	$\neg p \vee \neg q \neq r$
$\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \vee q)$	$\neg p \vee \neg q \neq \neg(p \wedge q)$

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

25

• Principio de dualidad

- Una expresión P es válida si y solo si P_D es válida.
- Además, $P \equiv Q$ es válida si y solo si $P_D \equiv Q_D$.

Dualidad

P (válida)	$\neg P_D$ (válida)
T	$\neg \perp$
$p \vee T$	$\neg(p \wedge \perp)$
$p \vee \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$

$P \equiv Q$ (válida)	$P_D \equiv Q_D$ (válida)
$T \equiv T$	$\perp \equiv \perp$
$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$	$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
$p \equiv q \equiv q \equiv p$	$p \neq q \equiv q \neq p$
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

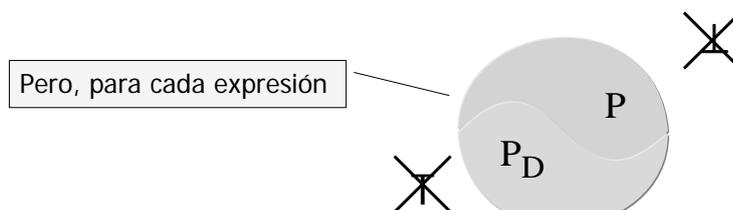
Ley de De Morgan

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

26

- El principio de dualidad es una propiedad que exhibe la lógica proposicional y está presente por definición.
- “Por cada expresión válida hay otra, que obedece a la misma estructura, y que también es válida”



13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

27

- Expresiones clausulares:

$$p \wedge q \wedge \dots \Rightarrow z$$

Calculadora

- Ejemplo: Mecanismo

- Base de reglas:
 - (1) $a \wedge b \Rightarrow u$
 - (2) $a \wedge c \Rightarrow v$
 - (3) $u \wedge v \Rightarrow x$

- Base de hechos: a, b, c, u

- Reglas de reescritura:

$$\alpha \quad \frac{A, B}{A \wedge B} \qquad \beta \quad \frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$

conjunción y modus ponens

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

28

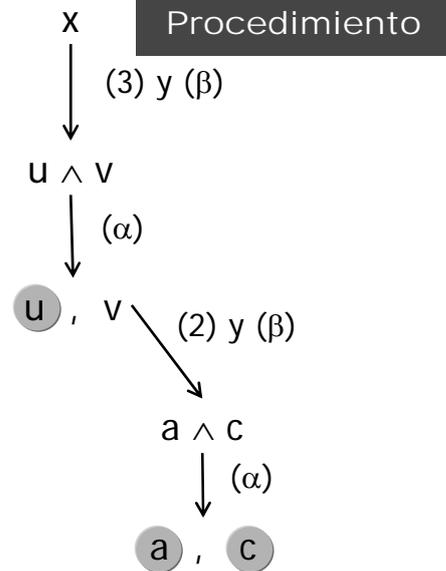
- Pregunta: ¿es cierto x?
- Idea: derivación en árbol

- (1) $a \wedge b \Rightarrow u$
- (2) $a \wedge c \Rightarrow v$
- (3) $u \wedge v \Rightarrow x$

a, b, c, u

$$\alpha \quad \frac{A, B}{A \wedge B} \quad \beta \quad \frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$

$$\frac{u \wedge v, u \wedge v \Rightarrow x}{x} \quad \frac{u, v}{u \wedge v}$$



13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

29

x (3) y (β)

$u \wedge v$ (α)

u, v (2) y (β)

Derivación en lista

$a \wedge c$ (α)

a, c

$$\begin{array}{l} x \xrightarrow{3} u \wedge v \Rightarrow x \xrightarrow{\beta} u \wedge v \xrightarrow{\alpha} u, v \xrightarrow{e} v \\ \xrightarrow{2} a \wedge b \Rightarrow v \xrightarrow{\beta} a \wedge b \xrightarrow{\alpha} a, b \xrightarrow{e} b \\ \xrightarrow{e} \text{éxito} \end{array}$$

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

30

Mecanismo de derivación

1. Construimos una lista con el objetivo
2. Retiramos el primer elemento para trabajar con él
 - a) Si es un hecho, ya está.
 - b) Si es una implicación resolvemos y dejamos al antecedente.
 - c) Si es una conjunción separamos y dejamos las componentes
 - d) Si no es hecho miramos expresiones donde esté como consecuente
 - Si tenemos éxito la ponemos
 - Si no hay éxito ponemos fallo
3. Si el primer elemento no es fallo y quedan elementos volvemos al paso 2
4. Si la lista está vacía ponemos éxito en la lista.

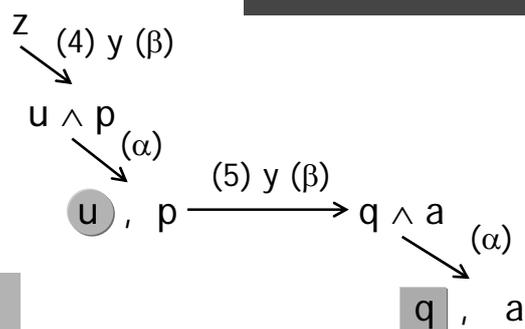
13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

31

- (1) $a \wedge b \Rightarrow u$
 - (2) $a \wedge c \Rightarrow v$
 - (3) $u \wedge v \Rightarrow x$
 - (4) $u \wedge p \Rightarrow z$
 - (5) $q \wedge a \Rightarrow p$
- a, b, c, u

(6) $u \wedge a \Rightarrow p$



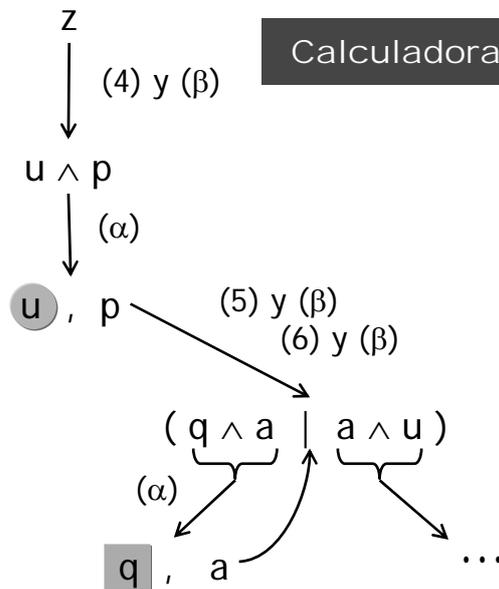
$$z \xrightarrow{4,\beta} u \wedge p \xrightarrow{\alpha} u, p \xrightarrow{e} p \xrightarrow{5,\beta} q \wedge a$$

$$\xrightarrow{\alpha} q, a \longrightarrow \text{fallo}, a$$

13/01/2006

FI1. ITI Sistemas - Informática (5)

32



Calculadora con reevaluación

Resumen

- Lógica = representación + razonamiento
- Nociones: esquema, axioma, teorema
- Semántica: Interpretación
 - Estructura + dominio + estado
- Nociones: consistencia, solidez, completitud.
- Se pueden añadir modelos de cómputo a la lógica (Prolog, y similares)