Estructuras de Datos y Algoritmos

Tema 5: Tablas de Dispersión

Departamento de Informática
Universidad de Valladolid

Curso 2018-19

Grado en Ingeniería Informática
Grado en Estadística

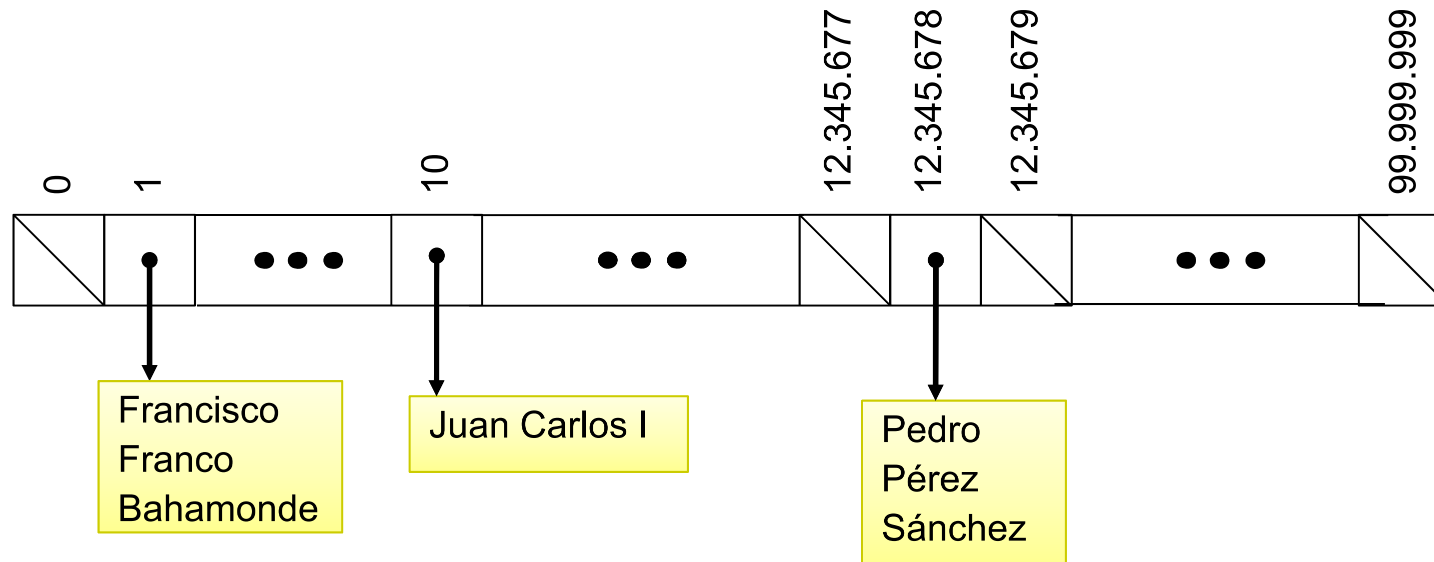
1. DEFINICIONES Y OBJETIVOS

Motivación

- Los **árboles equilibrados** consiguen un orden **O(log n)** para las operaciones básicas de los TADs **Conjunto**, **Mapa**, **Diccionario** y **Lista ordenada**.
- En el tema 3, sin embargo, vimos que los **arrays de bits** pueden conseguir un orden **O(1)** para acceso, inserción y borrado por valor.
- Problemas:
  - Los valores/claves deben ser números naturales.
  - El espacio de almacenamiento era proporcional al número de claves posibles, **u**. En general este valor es enorme.
  - Las operaciones de acceso al i-ésimo menor y recorrido en orden son **O(u)**.
- Esto los convierte en inútiles para la gran mayoría de casos.

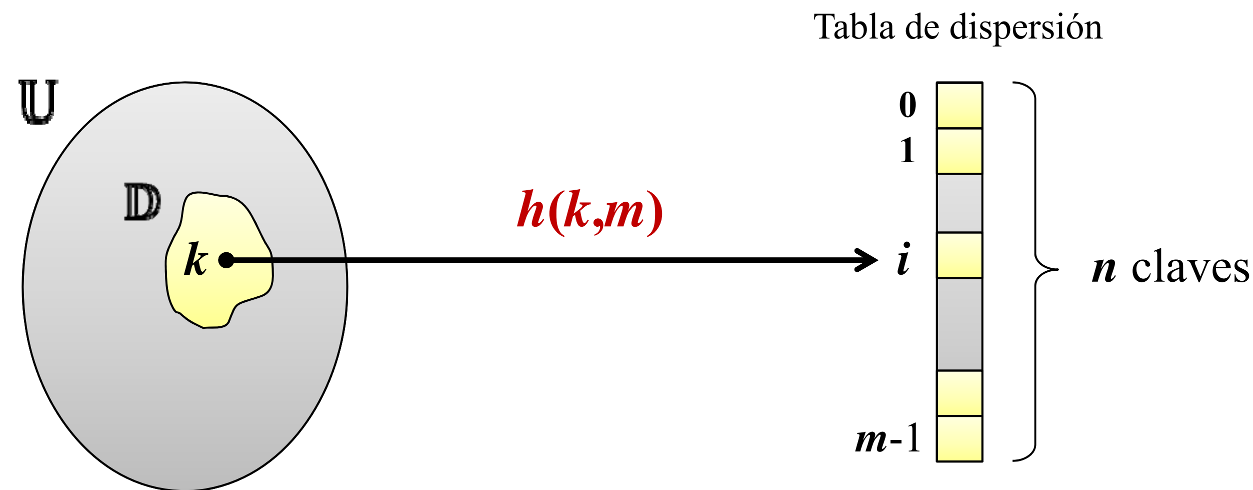
Caso práctico

- Supongamos un **mapa** en el que se almacenan datos sobre personas cuya clave es el DNI (número de 8 dígitos).
- Se necesitaría un array indexado por DNI, que almacena **100.000.000** de enlaces a registros/objetos.
- Ese espacio es **independiente** del número de registros que realmente almacenemos.



Solución

- La solución consiste en definir una **función** que permita **traducir** y **comprimir** la clave a un **índice** de una **tabla**, cuyo tamaño, ***m***, sea proporcional al número de elementos almacenados, ***n***, en vez de al número de claves posibles.
- El problema de éste enfoque son las **colisiones**. Según la manera de resolverlo hablaremos de dispersión **perfecta**, **ábierta** o **cerrada**.



Notación utilizada

- $\mathbb{U}$: **Espacio de claves**. Representa todos los valores posibles del tipo de datos que representa a las claves. Usaremos el símbolo k para representar una clave. u es el tamaño de $\mathbb{U}$, el número de posibles valores de clave.
- $\mathbb{D}$: **Espacio de datos**. Es el subconjunto de $\mathbb{U}$ que representa las claves que se van a almacenar. n es el tamaño de $\mathbb{D}$, el número de claves almacenadas.
- m : Capacidad de la **tabla de dispersión**. El objetivo es que sea proporcional a n, no a u. Es decir $m \in O(n)$.
- $h'(k)$: **Función de dispersión** primaria. Traduce (y posiblemente comprime) un valor de clave a una secuencia de bits que se interpreta como un número natural.
- $h(k, m)$: **Función de dispersión secundaria**. Traduce y comprime un valor de clave a un entero en el rango $[0..m\text{-}1]$.

  $i = h(k,m)$ es el **índice** de la tabla correspondiente a la clave k.

Funciones de Dispersión (Hash)

- Una **función de dispersión** (hash function) **traduce** un valor de un determinado tipo de datos (posiblemente complejo) a una secuencia de bits que suele interpretarse como un **número natural**.
- Si dos claves son **iguales** (en el contexto en que se trabaja), la función de dispersión debe devolver **el mismo valor** para ambas (**determinismo**):

$$k_1 = k_2 \Rightarrow h'(k_1) = h'(k_2)$$

- Pero el inverso no es cierto: Es perfectamente posible (y habitual) que dos claves **distintas** obtengan **el mismo valor** al aplicarseles la función de dispersión (**colisión**):

$$k_1 \neq k_2 \nRightarrow h'(k_1) \neq h'(k_2)$$

Funciones de Dispersión Criptográficas

- En criptografía, las funciones de dispersión (o resumen) se aplican a un **documento** o una serie de datos para obtener un **valor resumen** (digest, MAC, checksums) que se pueda usar para validarlos (los datos y el resumen se adquieren por "canales" distintos)
- Se obtiene una secuencia de bits (tipicamente 512)
- El objetivo primordial es diseñar funciones "**de un sólo sentido**", en el que el cálculo $i = h(k)$ sea sencillo, pero el inverso (conocido i obtener un k cualquiera que al aplicar la función devuelva i) sea básicamente imposible (por muestreo)
- No suelen usarse para tablas de dispersión (existen alternativas más eficientes)
- Ejemplos: ~~MD5~~, ~~SHA-1~~, SHA-2.

Funciones de Dispersión Normales

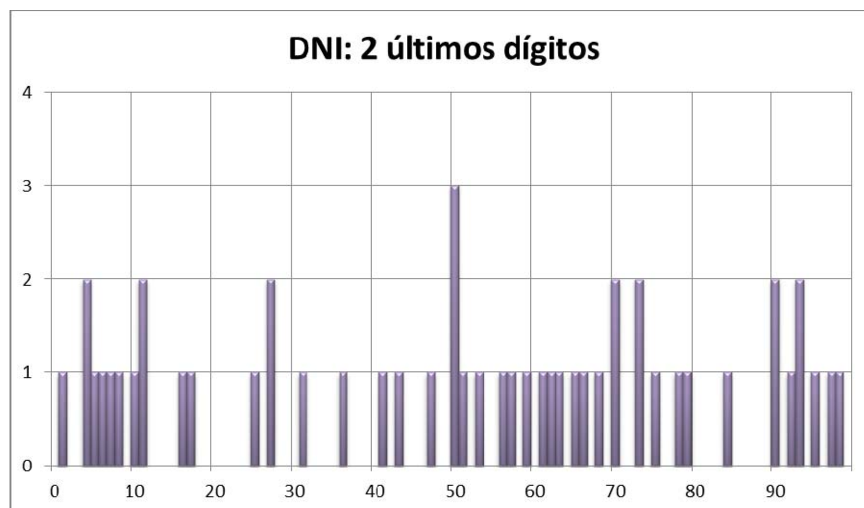
- Lo habitual es que el resultado sea un entero positivo en el rango típico de la máquina (32 o 64 bits)
- Existe una función distinta por cada tipo de datos que se vaya a utilizar para representar las claves. Ejemplos:
  - Enteros: $h'(n) = |n|$
  - Datos con más bits que un entero: Se dividen en trozos con el tamaño en bits de un entero y se hace un **xor** entre ellos.
  - Cadenas de caracteres: $h'(c_0 .. c_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} 31^i \cdot c_i$
- En Python existe la función hash para tipos de datos simples.
- En Java la clase Object incluye la función hashCode, por lo que todo objeto tiene definida una función de dispersión. **Cuidado**: Para nuevas clases devuelve la dirección de memoria del objeto.

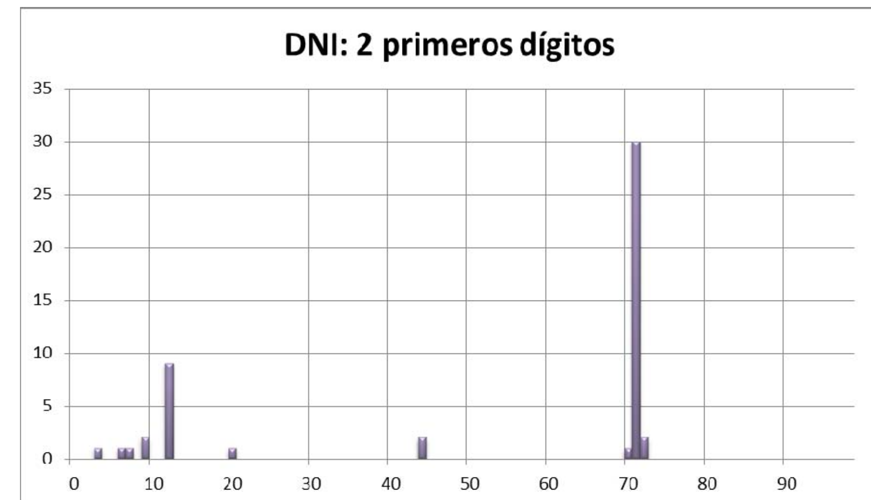
Colisiones y Uniformidad

- Se produce una **colisión** cuando a dos claves distintas la función de dispersión les asigna la misma posición en la tabla.
  - Si se desconocen los datos concretos que se van a introducir..
  - .. y el tamaño de la tabla es menor que el tamaño del espacio de claves ($m < u$)..
  - .. entonces la existencia de colisiones es inevitable.
- Respecto a la eficiencia, es importante que las funciones de dispersión tengan un comportamiento **uniforme** respecto al conjunto de datos que se almacenan.
  - Uniforme significa que la probabilidad de que a cualquier clave $\boldsymbol{k}$ del conjunto de datos se le asigne el índice $\boldsymbol{i}$ de la tabla sea $\mathbf{1/m}$.
  - La misma función de dispersión puede ser uniforme para un conjunto de datos y no serlo para otro (no se puede **garantizar** que una función de dispersión sea uniforme para cualquier conjunto de datos)

Ejemplo de uniformidad

- Tomamos los DNI’s de 50 alumnos de EDA y escogemos dos funciones de dispersión, la izquierda toma los dos últimos dígitos del DNI y la derecha los dos primeros:





- Si el conjunto de datos fuera “personas con DNI terminado en 00”, la primera función pasaría a no ser uniforme.

Factor de Carga

- Se define **factor de carga** como el ratio entre el número de elementos y la capacidad de una tabla de dispersión.

$$L = \frac{n}{m}$$

$$\alpha = \frac{n}{m+1}$$

← Versión que utilizaremos para los análisis. **L** ≅ α

  - En dispersión cerrada (0 o 1 claves por celda) es un valor entre 0 (tabla vacía) y 1 (tabla llena)
  - En dispersión abierta (una celda puede almacenar varias claves) puede tomar valores mayores que 1.

- La eficiencia de las operaciones sobre las tablas de dispersión dependen directamente del factor de carga.

- Para que se puedan considerar de tiempo constante, se establece un límite, L_{max}. Cuando al insertar elementos el factor de carga supera ese límite, se **reestructura** la tabla: Se amplía su tamaño, m (típicamente se duplica).

Funciones de dispersión secundaria

En general existen dos niveles en la definición de funciones de dispersión:

- En el primero se definen funciones que **traducen** el tipo de datos a un número natural.
  - Las denominamos $h'(k)$
  - Estan asociadas a cada tipo de dato concreto (definidas en la clase base (Java) o mediante una interfaz).
- En el segundo nivel se **comprime** el valor obtenido del primer nivel a un índice en el rango $[0..m\text{-}1]$.
  - Las denominamos $h(k, m)$.
  - Se debe tener en cuenta que el tamaño de la tabla de dispersión, m, puede cambiar debido a las reestructuraciones.

Funciones de dispersión secundaria

- El método más utilizado se denomina **método de división**:

$$h(k, m) = h'(k) \bmod m$$

- Para evitar problemas con la uniformidad, se debería escoger un valor de m que fuera primo (al reestructurar se escogería el siguiente primo mayor que $2 \cdot m$)
- Otro enfoque (Java) consiste en "barajar" los bits de $h'(k)$ antes de calcular el módulo. Con ello se pueden usar valores de m que sean potencias de dos (simplifica la reestructuración):

Desplaz. bits derecho → $\gg$; xor → $\otimes$

$$(h'(k) \gg 20) \otimes (h'(k) \gg 12) \otimes (h'(k) \gg 7) \otimes (h'(k) \gg 4) \otimes h'(k)$$

- Existen otros métodos (multiplicación, producto de vectores) que no estudiaremos.

Recapitulación

- Una **tabla de dispersión** consistirá en una tabla (array) de capacidad m que contiene elementos o listas de elementos, n elementos en un momento dado. Los elementos pueden ser pares clave-valor.
- Se necesita una función de dispersión primaria que traduzca las claves a números positivos.
- Se define un función de dispersión secundaria que comprima esos números a índices (tipicamente el método de división).
- Se especifica un factor de carga máximo. Cuando al insertar se supere ese valor, se reestructura la tabla.
- Veremos 3 variantes de tablas, según el método de resolver el problema de las colisiones: Dispersión perfecta, abierta y cerrada.

2. DISPERSIÓN PERFECTA

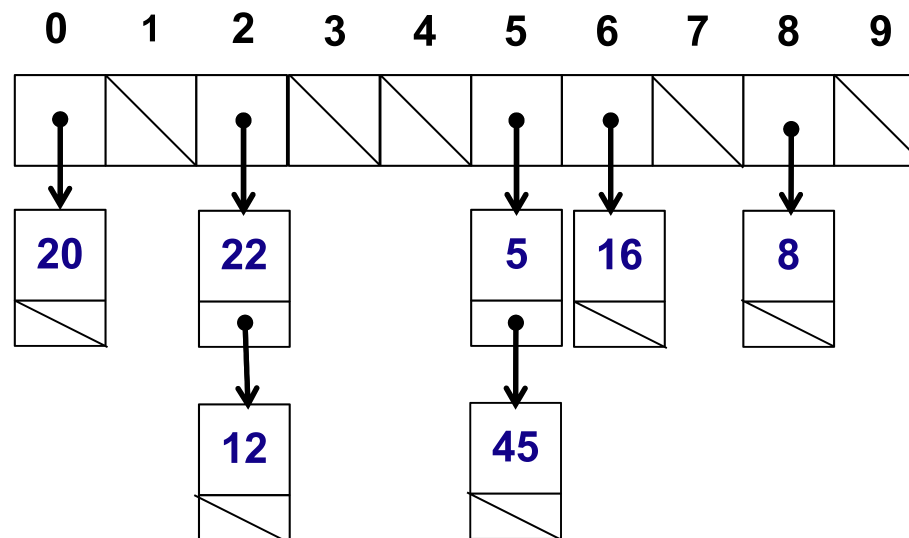
Dispersión Perfecta

- La estrategia de **dispersión perfecta** (perfect hashing) consiste en encontrar un conjunto de funciones de dispersión que al ser aplicadas a un conjunto de datos conocido no produzca ninguna colisión entre ellos.
- El conjunto de datos debe conocerse antes del diseño de la tabla, y no se puede modificar.
- Sólo se permiten operaciones de acceso, no se puede modificar la tabla (ni insertar ni borrar).
- Se basa en un conjunto de funciones de dispersión, parametrizadas por un valor aleatorio (producto vectorial).
- La búsqueda de las funciones adecuadas se realiza al azar, pero está garantizado que en un tiempo promedio $O(n)$ se pueden encontrar las funciones adecuadas.

3. DISPERSIÓN ABIERTA (CHAINING)

Dispersión Abierta (*chaining*)

- La estrategia de **dispersión abierta** resuelve el problema de las colisiones permitiendo que se almacene más de un elemento en cada celda de la tabla.
- Lo habitual es que cada celda almacene un enlace a una lista simplemente enlazada de elementos.
- Ejemplo: (Secuencia de inserciones: 16, 8, 12, 20, 22, 45, 5)



$h(k, 10) = k \ \mathbf{mod} \ 10$

Operaciones

- Las operaciones basadas en valor (búsqueda, inserción y borrado por valor) consisten en:
  - Usar la función de dispersión secundaria para obtener el índice de la tabla correspondiente al valor (o clave).
  - Realizar la operación sobre la lista enlazada referenciada en esa posición.
  - La búsqueda y el borrado recorren la lista hasta encontrar el elemento (búsqueda secuencial).
  - La inserción es inmediata: Se crea un nuevo nodo con el elemento (o par clave/valor) y se inserta al principio de la lista.
  - Si en la inserción se supera el factor de carga máximo, se reestructura la tabla.
- Para cualquier otro tipo de operación (acceso *i*-ésimo menor, recorrido ordenado,fusión, etc.) se comporta como un vector de listas desordenadas.

Eficiencia promedio

- Si la función de dispersión es **uniforme** para el conjunto de datos utilizado:
  - Cada clave tiene la misma probabilidad de que se le asigne cualquiera de los m índices.
  - La longitud promedio de las listas es n/m, igual al factor de carga
- Búsquedas exitosas: $\mathbf{1 + L/2}$ accesos en promedio.
  - En una lista de longitud L el promedio es L/2 accesos.
  - El **borrado** de una clave equivale a una búsqueda exitosa.
- Búsquedas fallidas: $\mathbf{1 + L}$ accesos en promedio.
  - m búsquedas fallidas, una por cada índice de la tabla, recorren la suma de longitudes de las listas: (m + n)/m = 1 + L
- Inserción: $\mathbf{1}$ acceso mejor caso, $\mathbf{O(1)}$ en tiempo amortizado.
  - La **reestructuración** es $\mathbf{O}(n)$, pero garantiza n inserciones en $\mathbf{O(1)}$

Eficiencia peor caso

- El peor caso se da cuando la función de dispersión es extremadamente no uniforme: Asigna la misma posición a todas o la mayoría de las claves del conjunto de datos.
- La tabla contiene una única lista con los n elementos.
- En circunstancias normales la probabilidad de caer en el peor caso es insignificante ($1/m!$)
- Pero definida una función de dispersión, siempre es posible diseñar un conjunto de datos que provoque el peor caso (ataque por degradación de eficiencia).
  - Búsqueda, borrado: $\mathbf{O}(n)$ accesos en promedio.
  - Inserción: Sigue siendo $\mathbf{O}(1)$ en tiempo amortizado.

Resumen eficiencia

L = n/m < Lmax
m ∈ O(n)
L ∈ O(1)
*** Tiempo amortizado**

	Uniforme promedio (exacto)	Uniforme promedio	No uniforme promedio
Búsqueda exitosa	$1 + L/2$	$O(1)$	$O(n)$
Búsqueda fallida	$1 + L$	$O(1)$	$O(n)$
Borrado por valor	$1 + L/2$	$O(1)$	$O(n)$
Inserción por valor	$1 \mid n$	$O(1)$*	$O(1)$*
Espacio	$O(n + m)$	$O(n)$	$O(n)$

Ejemplo en Java (I)

```java
// Tabla de dispersión abierta que almacena pares clave-valor
public class TablaDispAbi<K,V> {
    // Clase interna que representa un
    // nodo de una lista simplemente enlazada
    private class Nodo<K,V> {
        K clave;
        V valor;
        Nodo<K,V> sig;
        Nodo(K clave, V valor, Nodo<K,V> sig) {
            this.clave = clave; this.valor = valor;
            this.sig = sig;
        }
    }
    int m;       // Capacidad de la tabla
    int n;       // Número de elementos
    double maxL; // Máximo factor de carga
```

Ejemplo en Java (II)

```
// Tabla de dispersión (array de listas de pares)
Nodo<K,V>[] tabla;

// Constructor con valores por defecto
public TablaDispAbi() { this(16,2.5); }

// Constructor: m0 - capacidad inicial
// maxL - factor de carga máximo
public TablaDispAbi(int m0, double maxL) {
    this.maxL = maxL;
    this.m = m0;
    tabla = new Nodo[m];
    for(int i = 0; i < m; i++) tabla[i] = null;
    this.n = 0;
}
// Devuelve el indice correspondiente a esa clave
protected int indice(K c) { return Math.abs(c.hashCode()) % m; }
```

Ejemplo en Java (IV)

```java
protected void reestructurar() {
    // Salvamos la tabla anterior
    Nodo<K,V>[] tmp = tabla;
    // Creamos una nueva tabla
    n = 0; m = 2*m; // Duplicamos el tamaño
    tabla = new Nodo[m];
    for(int i = 0; i < m; i++) tabla[i] = null;
    // Recorremos la tabla anterior insertando elementos
    for(int i = 0; i < tmp.length; i++) {
        Nodo<K,V> nodo = tmp[i];
        while(nodo != null) {
            ins(nodo.clave, nodo.valor);
            nodo = nodo.sig;
        }
    }
}
```

Ejemplo en Java (V)

```
 public V get(K clave) {
     // Aplicar función de dispersión a la clave
     int i = indice(clave);
     // Buscar en la lista i-ésima
     Nodo<K,V> p = tabla[i];
     while(p != null && !p.clave.equals(clave)) p = p.sig;
     return (p == null) ? null : p.valor;
}
public void ins(K clave, V valor) {
    // Incrementar n y comprobar factor de carga
    n++;
    if((1.0*n)/m > maxL) reestructurar();
    // Aplicar función de dispersión a la clave
    int i = indice(clave);
    // Insertar al principio de la lista i-ésima
    tabla[i] = new Nodo(clave, valor, tabla[i]);
}
```

Ejemplo en Java (VI)

```
public boolean del(K clave) {
  // Aplicar función de dispersión a la clave
  int i = indice(clave);
  // Buscar nodo controlando elemento anterior
  Nodo<K,V> ant = null;
  Nodo<K,V> act = tabla[i];
  while(act != null && !act.clave.equals(clave)) {
    ant = act;
    act = act.sig;
  }
  if(act == null) { return false; }
  // Comprobar caso especial borrado del primero
  if(ant == null) tabla[i] = act.sig; else ant.sig = act.sig;
  n--;
  return true;
}
```

4. DISPERSIÓN CERRADA (OPEN ADDRESSING)

Dispersión Cerrada (*open addressing*)

- En la estrategia de **dispersión cerrada** cada celda de la tabla almacena un único elemento (o ninguno).
  - Una consecuencia directa es que, a diferencia de la dispersión abierta, el número de elementos almacenados no puede superar la capacidad de la tabla: $n < m$, $L < 1.0$
- El problema de las colisiones se resuelve estableciendo una secuencia de posiciones (ruta de exploración) en las que puede encontrarse un elemento en la tabla.
  - Dispersión abierta: Varios elementos en cada celda.
  - Dispersión cerrada: Varias celdas disponibles para cada elemento
- Cada celda de la tabla puede estar en 3 estados distintos:
  - **Ocupada**: Contiene un elemento, no se puede insertar en ella.
  - **Vacía**: Se puede insertar en ella, detiene la exploración.
  - **Borrada**: Se puede insertar en ella, no detiene la exploración.

Dispersión Cerrada (II)

- Los estados de las celdas se pueden representar:
  - Mediante **valores especiales** de las claves (uno para indicar celda vacía y otro para indicar celda borrada)
  - O mediante una **tabla extra** que almacene valores que indiquen en cuál de los 3 estados se encuentra la celda correspondiente de la tabla principal.
- Además de la función de dispersión, en este tipo de tablas es necesario definir una estrategia de exploración
  - La estrategia indica cuál es la **siguiente celda** que se debe explorar cuando la celda actual no esté vacía (inserción) o no contenga el elemento buscado (acceso, borrado)
  - Se suele expresar mediante una **función** que depende de la **posición inicial** (la proporcionada por la función de dispersión) y el **número de intento** (número de colisiones hasta el momento).
  - Cada intento debe proporcionar una posición de la tabla por la que no se halla pasado en intentos anteriores (**recorrido completo**)

Exploración Lineal (consecutive probing)

- Es la estrategia de exploración más sencilla:
  - Cada nuevo intento explora la **siguiente** celda de la tabla.
  - Si estamos en la última celda, pasamos a la primera.

Posición inicial, $i_0 = h(k, m)$

$$f(i_0, j, m) = (i_0 + j) \textbf{ mod } m$$

Número de intento (j)

- Ejemplo: Inserción del valor 28 en una tabla con m = 10 y los siguientes elementos ya incluidos:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30		22				56		48	18

$i_0 = h(28,10) = 8$

Exploración Lineal (consecutive probing)

- Es la estrategia de exploración más sencilla:
  - Cada nuevo intento explora la **siguiente** celda de la tabla.
  - Si estamos en la última celda, pasamos a la primera.

Posición inicial, $i_0 = h(k,m)$

$$f(i_0, j, m) = (i_0 + j) \ \mathbf{mod}\ m$$

Número de intento

- Ejemplo: Inserción del valor 28 en una tabla con m = 10 y los siguientes elementos ya incluidos:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30		22				56		48	18

$j = 1$

Exploración Lineal (consecutive probing)

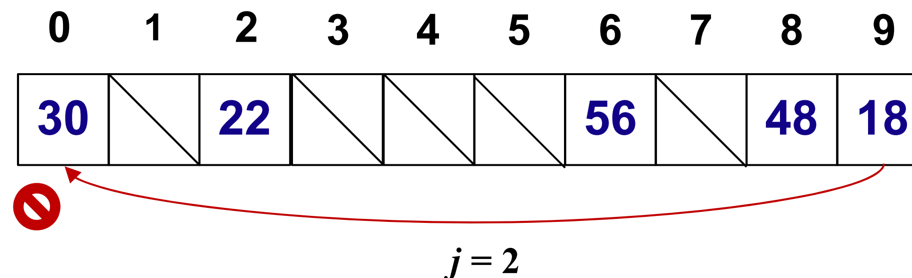
- Es la estrategia de exploración más sencilla:
  - Cada nuevo intento explora la **siguiente** celda de la tabla.
  - Si estamos en la última celda, pasamos a la primera.

Posición inicial, $i_0 = h(k,m)$

$$f(i_0, j, m) = (i_0 + j) \mathbf{\ mod\ } m$$

Número de intento

- Ejemplo: Inserción del valor 28 en una tabla con m = 10 y los siguientes elementos ya incluidos:



Exploración Lineal (consecutive probing)

- Es la estrategia de exploración más sencilla:
  - Cada nuevo intento explora la **siguiente** celda de la tabla.
  - Si estamos en la última celda, pasamos a la primera.

Posición inicial, $i_0 = h(k,m)$

$$f(i_0, j, m) = (i_0 + j) \textbf{ mod } m$$

Número de intento (j)

- Ejemplo: Inserción del valor 28 en una tabla con *m* = 10 y los siguientes elementos ya incluidos:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	28	22				56		48	18

$j = 3$

Agrupamiento (clustering)

- La estrategia de exploración lineal sufre del problema del **agrupamiento**: La formación de grandes bloques de celdas ocupadas.
  - Si se forma (al azar) un bloque de celdas ocupadas..
  - Si una clave es enviada a una posición dentro del bloque..
  - ..deberá explorarlo hasta el final, ocupando la siguiente posición vacía contigua al bloque..
  - ..y haciendo que el bloque incremente su tamaño!
- Consecuencia: Las claves se agrupan en bloques donde el número de intentos es alto, degradando la eficiencia.
  - Este problema es independiente de la uniformidad de la función de dispersión.
  - Deriva directamente de la estrategia de exploración.
- Solución: Usar un factor de cárga límite más pequeño.

Exploración Doble (double hashing)

- Otra solución reside en hacer que la exploración no dependa tan sólo de la posición inicial, sino también del propio valor de la clave.
  - De esa forma claves distintas que han sido enviadas a la misma posición inicial seguirán rutas distintas.
  - Y se consigue un mejor aprovechamiento de las posiciones vacías que existan en la tabla.
  - Para obtener otro parámetro dependiente de la clave se necesita definir una **segunda función de dispersión**, distinta de la usada habitualmente (por eso el nombre de exploración **doble**).
- Lo habitual es que ese segundo parámetro defina el **salto** en la exploración:

Cada intento salta **d** celdas

$$f(i_0, j, d, m) = (i_0 + d \cdot j) \bmod m$$

Exploración Doble (II)

- Cada nuevo intento explora la celda situada a una distancia de d celdas a la derecha (la tabla se interpreta como si fuera circular). Si $d = 1$ tendríamos una exploración lineal.
- El valor del salto, d, depende del valor de la clave. Un método habitual de definirlo, si se utiliza como función de dispersión secundaria el método de división, es:

$$i_0(k,m) = h'(k) \ \mathbf{mod} \ m$$

$$\boxed{d(k,m) = \text{máx}\{1, h'(k) \ \mathbf{div} \ m\}}$$

- De esta forma se consigue un valor de salto dependiente de la clave pero independiente de la posición inicial.
- Existen algunos detalles a tener en cuenta para garantizar una exploración completa.

Exploración Doble (III)

- La exploración lineal garantiza de forma trivial la exploración de toda la tabla.
- Pero una exploración a base de saltos de d celdas no siempre va a recorrer todas las celdas.
  - Por ejemplo, si la tabla tiene tamaño 12 y el salto es 4, sólo vamos a recorrer 3 celdas distintas antes de entrar en un ciclo.
- **Teorema**: Si m y d son primos entre sí (no tienen factores en común) esta garantizado un recorrido completo.
  - **Solución #1**: Imponer que m sea un número primo. Al reestructurar, escoger el siguiente primo mayor que $2m$
  - **Solución #2**: Imponer que m se una potencia de dos, y que d sea un número impar (si es par, se le suma 1)

Exploración Doble - Ejemplo

- Tabla con m = 2^3 = 8 (solución #2), inserción de 17:

0	1	2	3	4	5	6	7
40	9	2		36		14	

$i_0 = 17 \bmod 8 = 1$

0	1	2	3	4	5	6	7
40	9	2		36		14	

0	1	2	3	4	5	6	7
40	9	2		36		14	17

$d = 17 \text{ div } 8 = \cancel{2} \rightarrow 3$

Exploración Doble - Ejemplo

- Misma tabla, inserción de 73:

0	1	2	3	4	5	6	7
40	9	2		36		14	17

$i_0 = 73 \bmod 8 = 1$

0	1	2	3	4	5	6	7
40	9	2		36		14	17

0	1	2	3	4	5	6	7
40	9	2	73	36		14	17

$d = 73 \text{ div } 8 = 9$

El problema del borrado (I)

- Supongamos que tenemos la siguiente tabla (método de exploración lineal) donde la secuencia de inserción ha sido 14, 25, 4, 5:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\	\	\	\	14	25	4	5	\	\

- Si buscamos el valor 15, comenzaremos en la posición 5 e iremos explorando las celdas siguientes hasta llegar a la 8, que está vacía. Detenemos la búsqueda porque si se hubiera insertado el valor 15 la exploración lo hubiera colocado en la celda 8 (o anteriores). Si está vacía, es que no se ha insertado.
- Pero si ahora borramos el valor 25, los valores 4 y 5 son inalcanzables!

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\	\	\	\	14	\	4	5	\	\

El problema del borrado (II)

- Una posición vacía indica el final de una ruta de exploración
- Si al borrar un elemento marcamos la casilla como vacía, entonces se rompen las rutas en las que éste elemento es un punto intermedio.
- Si no se elimina el elemento, el borrado sería imposible (una búsqueda sobre él volvería a encontrarlo)
- Si la exploración no se detiene en las casiilas vacías, las búsquedas fallidas recorrerían toda la tabla: $O(m)$
- El recolocar los elementos de las rutas rotas causaría que el borrado fuera $O(n)$: El recolocar un elemento supone de hecho borrarle y puede producir nuevas recolocaciones en cascada.
- **Solución**: No eliminar el elemento, pero marcar la casilla como borrada para que la búsqueda no lo encuentre.

Estrategia de borrado perezoso

- Se definen 3 estados asociados a cada celda: ocupado, vacío, borrado. La lógica de las operaciones es:

INSERTAR

$\Delta\, n$
SI $n/m > Lmax$ **: REESTRUCTURAR**

LINEAL

$i \leftarrow h'(k)$ **mod** m
$d \leftarrow 1$

DOBLE #1 (m primo)

$i \leftarrow h'(k)$ **mod** m
$d \leftarrow h'(k)$ **div** m
SI d **mod** $m = 0$ **:** $d \leftarrow 1$

DOBLE #2 (m potencia de dos)

$i \leftarrow h'(k)$ **mod** m
$d \leftarrow h'(k)$ **div** m
SI PAR(d) **:** $\Delta\, d$

BUSCAR / BORRAR

MIENTRAS BORRADA(T[i]) **Ó**
(OCUPADA(T[i]) **Y** T[i] $\neq k$) **:**
| $i \leftarrow (i + d)$ **mod** m

INSERTAR

MIENTRAS OCUPADA(T[i]) **:**
| $i \leftarrow (i + d)$ **mod** m

BORRAR

SI OCUPADA(T[i]) **:**
/ **MARCAR** T[i] BORRADA
/ $\nabla\, n$

INSERTAR

T[i] $\leftarrow k$
MARCAR T[i] OCUPADA

Ejemplo en Java (I)

```java
// Tabla de dispersión cerrada que almacena pares clave-valor
public class TablaDispCer<K,V> {
    // Clase interna que representa un par clave-valor
    private class Par<K,V> {
        K clave;
        V valor;
        Par(K clave, V valor, Nodo<K,V> sig) {
            this.clave = clave; this.valor = valor;
        }
    }
    int m;       // Capacidad de la tabla
    int n;       // Número de elementos
    double maxL; // Máximo factor de carga
    // Tabla de pares clave-valor. Si un par existe pero la
    // clave es nula, se ha realizado un borrado perezoso.
    Par<K,V>[] tabla;
```

Ejemplo en Java (II)

```java
// Constructor con valores por defecto
public TablaDispCer() { this(16,0.6); }

// Constructor: m0 - capacidad inicial (potencia de dos)
// maxL - factor de carga máximo (maxL < 1)
public TablaDispCer(int m0, double maxL) {
    this.maxL = maxL; this.m = m0;
    tabla = new Par[m];
    for(int i = 0; i < m; i++) tabla[i] = null;
    this.n = 0;
}
// Devuelve el indice correspondiente a esa clave
protected int indice(K c) { return Math.abs(c.hashCode()) % m; }

// Calcula el salto de exploración
protected int salto(K c) {
    int s = Math.abs(c.hashCode()) / m;
    return (s % 2 == 0) ? s+1 : s; }
```

VER TRANSP. 39

Ejemplo en Java (IV)

```java
protected void reestructurar() {
    // Salvamos la tabla anterior
    Par<K,V>[] tmp = tabla;
    // Creamos una nueva tabla
    n = 0; m = 2*m; // Duplicamos el tamaño
    tabla = new Par[m];
    for(int i = 0; i < m; i++) tabla[i] = null;
    // Recorremos la tabla anterior insertando elementos
    for(int i = 0; i < tmp.length; i++) {
        Par<K,V> par = tmp[i];
        if(par != null && par.clave != null) {
            ins(par.clave, par.valor);
        }
    }
}
```

Ejemplo en Java (V)

```
public V get(K clave) {
    // Aplicar función de dispersión a la clave
    int i = indice(clave);
    // Calcular el salto de exploración
    int d = salto(clave);
    // Explorar la tabla hasta posición nula o encontrado
    // Una par nulo detiene la exploración, pero una
    // clave nula no (borrado perezoso)
    while(tabla[i] != null &&
           (tabla[i].clave == null ||
            !tabla[i].clave.equals(clave))) {
        i = (i+d) % m;
    }
    return (tabla[i] == null) ? null : tabla[i].valor;
}
```

Ejemplo en Java (VI)

```
 public void ins(K clave, V valor) {
   // Incrementar n y comprobar factor de carga
   n++; if(1.0*n/m > maxL) reestructurar();
   // Aplicar función de dispersión a la clave
   int i = indice(clave);
   int d = salto(clave);
   // Explorar la tabla hasta encontrar un par nulo o
   // una clave nula (borrado perezoso)
   while(tabla[i] != null && tabla[i].clave != null) i = (i+d) % m;
   // Insertar clave en posición
   if(tabla[i] == null) {
     tabla[i] = new Par(clave,valor);
   } else { // Borrado perezoso, reutilizar el par
     tabla[i].clave = clave; tabla[i].valor = valor;
   }
}
```

Ejemplo en Java (VII)

```
public boolean del(K clave) {
  // Aplicar función de dispersión a la clave
  int i = indice(clave);
  int d = salto(clave);
  // Explorar la tabla hasta posición nula o encontrado
  // Las claves nulas no detienen la exploración (borrado perezoso)
  while(tabla[i] != null &&
       (tabla[i].clave == null || !tabla[i].clave.equals(clave))) {
       i = (i+d) % m;
  }
  if(tabla[i] == null) { return false; }
  tabla[i].clave = null; // Borrado perezoso
  n--;
  return true;
}
```

Análisis dispersión cerrada (I)

- Llamamos $T_f\ (m,n)$ al número **promedio** de accesos hasta encontrar una **posición vacía** en una tabla de capacidad m que contiene n elementos.
    - Si la **función de dispersión** es **uniforme**, la probabilidad de caer en una celda ocupada es n/m
    - En ese caso, la **función de exploración** calculará **otra posición** de la tabla. Ya que no va a volver a elegir la celda donde estamos, el problema es identico al de buscar una posición vacía en una tabla de capacidad m-1 con n-1 elementos.
- Se tiene la relación de **recurrencia**:

$$T_f(m,n) = 1 + \frac{n}{m} \cdot T_f(m-1, n-1)$$

Análisis dispersión cerrada (II)

- Esta relación se puede resolver por tanteo, explorando la forma que adquiere con valores crecientes de n

$$T_f(m,n) = 1 + \frac{n}{m} \cdot T_f(m-1, n-1)$$

$$T_f(m,0) = 1$$

$$T_f(m,1) = 1 + \frac{1}{m} \cdot T_f(m-1,0) = 1 + \frac{1}{m} = \frac{m+1}{m}$$

$$T_f(m,2) = 1 + \frac{2}{m} \cdot T_f(m-1,1) = 1 + \frac{2}{m} \cdot \frac{m}{m-1} = \frac{m+1}{m-1}$$

$$T_f(m,3) = 1 + \frac{3}{m} \cdot T_f(m-1,2) = 1 + \frac{3}{m} \cdot \frac{m}{m-2} = \frac{m+1}{m-2}$$

$$T_f(m,n) = \frac{m+1}{m+1-n} = \frac{1}{1-\frac{n}{m+1}} = \boxed{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Análisis dispersión cerrada (III)

- Llamamos $T_e(m,n)$ al número **promedio** de accesos hasta encontrar un **elemento existente** en una tabla de capacidad m que contiene n elementos.
  - Es el tiempo de una **búsqueda exitosa** de un elemento.
  - La búsqueda recorre el **mismo camino** seguido en la **inserción** de ese elemento en la tabla
  - El tiempo de búsqueda del i-ésimo elemento que se insertó en la tabla es igual al del tiempo promedio para encontrar una **posición vacía** en una tabla de capacidad m y i-1 elementos.
  - Se realiza el promedio sobre los n elementos existentes:

$$T_e(m,n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_f(m, i-1)$$

Análisis dispersión cerrada (IV)

- Sustituyendo:

$$T_e(m,n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_f(m, i-1) = \frac{m+1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{m+1-i}$$

- Cambiando la variable del sumatorio por $j = m+1-i$:

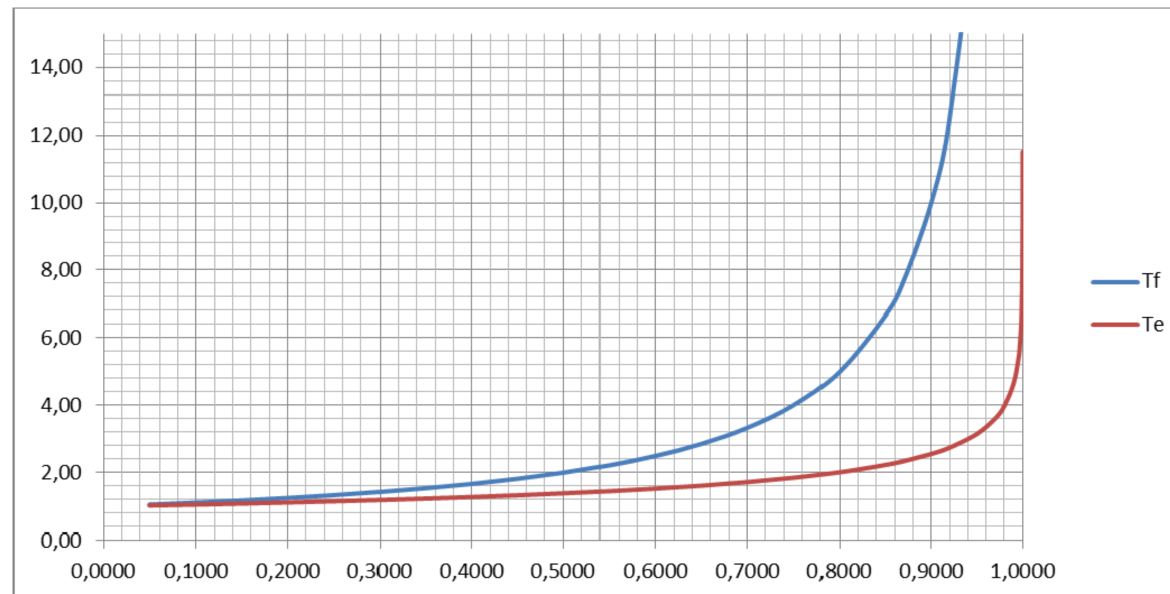
$$T_e(m,n) = \frac{m+1}{n}\sum_{j=m-n+2}^{m+1}\frac{1}{j} = \frac{m+1}{n}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{m+1-n}\frac{1}{j}\right)$$

- Aplicando la fórmula $\sum_{i=1}^{n} 1/n = \ln n + \gamma$

$$T_e(m,n) = \frac{m+1}{n}\ln\frac{m+1}{m+1-n} = \boxed{\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\alpha}}$$

Análisis dispersión cerrada (V)

- Del análisis anterior podemos concluir:
  - La dependencia con respecto al factor de carga es mucho mayor que en dispersión abierta: Cuando L → 1, el número de accesos tiende a infinito (más acusado en´las búsquedas fallidas).
  - La exploración lineal es muy sensible a la uniformidad de la función de dispersión (por el agrupamiento), la exploración doble es mucho más robusta en ese aspecto.



Resumen eficiencia

* Tiempo amortizado

	Dispersión abierta (exacto)	Dispersión cerrada (exacto)	Uniforme	No uniforme
Búsqueda exitosa	1 + L/2	ln(1/(1+L))/L	O(1)	O(*n*)
Búsqueda fallida	1 + L	1/(1+L)	O(1)	O(*n*)
Borrado por valor	1 + L/2	ln(1/(1+L))/L	O(1)	O(*n*)
Inserción por valor	1 | *n*	1/(1+L)	O(1)*	O(*n*)

- Para cualquier otro tipo de operaciones, una tabla de dispersión cerrada se comporta como un vector desordenado con posiciones vacías y borradas entre los elementos.

Uso de las Tablas de Dispersión

- Las tablas de dispersión, cuando se cumplen todos sus requisitos, son una alternativa mejor que los árboles equilibrados para los **TADs Conjunto** y **Mapa**.
  - Se debe definir una función de dispersión.
  - El factor de carga no debe superar un límite (reestructuraciones)
  - La función de dispersión debe ser (+ o -) uniforme para el conjunto de datos utilizado.
- No se comportan bien, sin embargo, para TADs con un orden interno: Lista ordenada, Cola de Prioridad, Diccionario.
- ¿Dispersión abierta o cerrada?
  - La dispersión cerrada utiliza mejor el espacio si los datos a almacenar tienen un tamaño pequeño. La dependencia con el factor de carga es mucho más crítica, sin embargo.
  - La dispersión abierta tiene una dependencia lineal con el factor de carga (las reestructuraciones pueden ser menos frecuentes).

Eficiencia TADs Conjunto/Mapa

	Contigua ordenada	Árbol AVL	Tabla de Disp. (promedio)
Pertenencia (conjunto) Acceso por clave (mapa)	O(log *n*)	O(log *n*)	O(1)
Borrado (por valor/clave)	O(*n*)	O(log *n*)	O(1)
Inserción (por valor)	O(*n*)	O(log *n*)	O(1)*
Iterar todos los elementos	O(*n*)	O(*n*)	O(*n*)
Unión (ambos tamaño *n*)	O(*n*)	O(*n* log *n*)	O(*n*)

Eficiencia TAD Diccionario

	Contigua ordenada	Arbol AVL	Tabla Disp (promed.)
Acceso por clave	O(log *n*)	O(log *n*)	O(1)
Acceso clave *i*-ésima menor	O(1)	O(log *n*)	O(*n*)
Acceso por iterador	O(1)	O(1)	O(1)
Borrado por clave	O(*n*)	O(log *n*)	O(1)
Borrado clave *i*-ésima menor	O(*n*)	O(log *n*)	O(*n*)
Borrado por iterador	O(*n*)	O(log *n*)	O(1)
Inserción por valor	O(*n*)	O(log *n*)	O(1)

The long and winding road..

Array indexado por clave
Espacio O(u), claves enteras

↓ Función de dispersión
Lmax, Reestructuración

Array indexado por i = h(k,m)
Colisiones

- Dispersión perfecta → Disp. Perfecta
  Datos estáticos
- Dispersión abierta → Array de listas
- Exploración → Array de vacio/elem
  ¿Borrado?
  - Borrado perezoso → Array de vacio/borrado/elem
    ¿Tipo de exploración?
    - Lineal → Array de v/b/e
      Agrupamiento
    - Doble → Array de v/b/e
      Exploración parcial
      - m y d primos entre sí → Array de v/b/e